Donner une fonction continue sur $\mathbb{R}$ prenant exactement trois fois chacune des valeurs de $\mathbb{R}$.

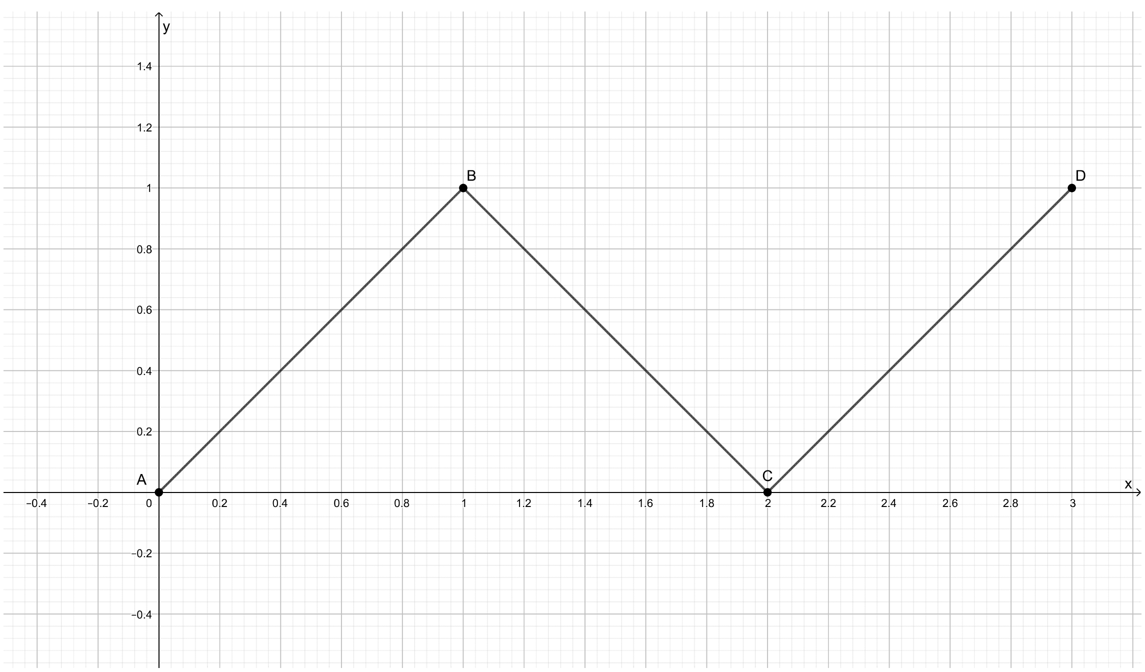
Analyse

Il convient bien sûr d'oublier la stricte monotonie sur $\mathbb{R}$! ☺ Mais on doit cependant y penser sur des segments…

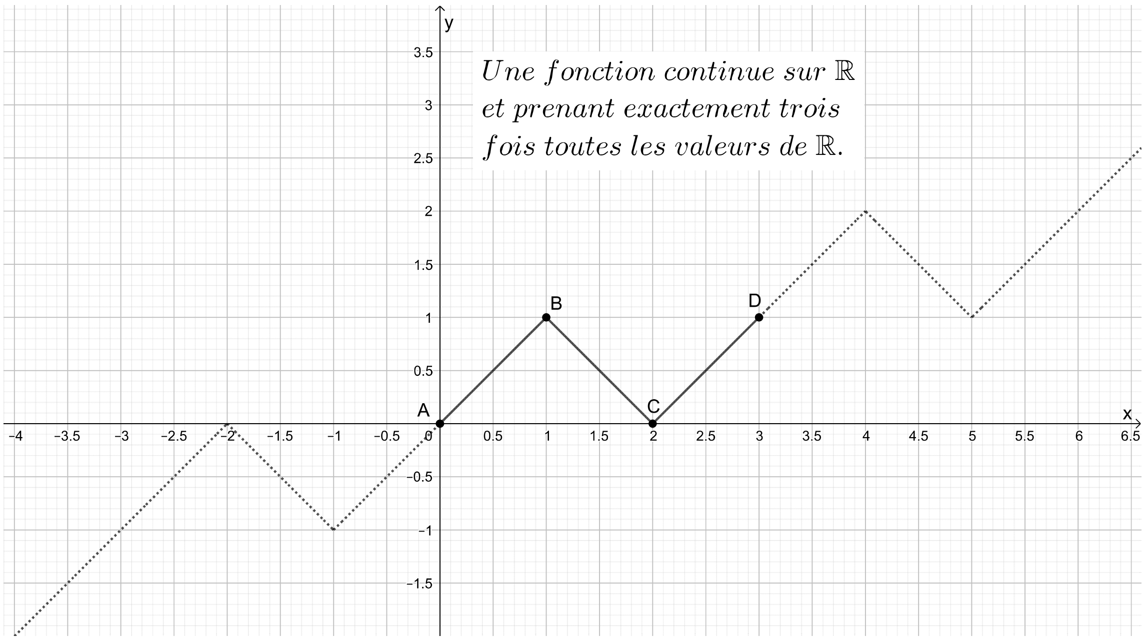
Résolution

A partir de la fonction identité, on crée facilement une bijection de l'intervalle $[0\,;1]$ dans lui-même. Ensuite, on peut géométriquement construire la fonction suivante dont on donne une représentation graphique ci-dessous :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0\,;1] \\ 2-x & \text{si } x \in [1\,;2] \\ x-2 & \text{si } x \in [2\,;3] \end{cases}$$



Toutes les valeurs de $]0\,;1[$ sont alors prises exactement trois fois mais 0 et 1 sont prises seulement deux fois. En reproduisant cependant ce « motif », on peut définir une fonction continue sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la contrainte imposée :



Notons φ la fonction correspondant à la représentation ci-dessus. Pour obtenir la définition générale sur $\mathbb{R}$ de φ, il suffit de considérer un intervalle de la forme $[3k\,;3(k+1)]$. La courbe représentative de la restriction de φ à cet intervalle est obtenue à partir de celle de la fonction *f* en effectuant une translation de vecteur $3k\vec{i}+k\vec{j}$. De fait, pour tout *x* d'un tel intervalle, on a simplement $\varphi(x)=f(x-3k)+k$. En définitive :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} x-2k & \text{si } x\in[3k\,;3k+1] \\ 4k+2-x & \text{si } x\in[3k+1\,;3k+2] \\ x-2k-2 & \text{si } x\in[3k+2\,;3(k+1)] \end{cases}$$