Soit $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ surjective et continue.

a) Montrer que *f* s'annule une infinité de fois.

b) Montrer que *f* prend une infinité de fois chaque valeur de $\mathbb{R}$.

Analyse

La surjectivité garantit que la fonction *f* s'annule au moins une fois. On peut alors mener un raisonnement par l'absurde.
Pour la deuxième question, on peut facilement se ramener à la situation de la première question.

Résolution

Question a.

Comme la fonction *f* est surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution.
Supposons alors que l'équation $f(x)=0$ admette un nombre fini de solutions : $x_1 < x_2 < \ldots < x_N$ (avec $N \geq 1$).
Sur le segment $[0\,;x_N]$, la fonction *f* est bornée et, étant continue, atteint ses bornes : il existe donc deux réels *m* et *M* tels que $f([0\,;x_N]) = [m\,;M]$.
Par ailleurs, sur l'intervalle $]x_N\,;+\infty[$, la fonction *f* est continue et ne s'annule pas. Elle garde donc un signe constant. On peut par exemple supposer que la fonction *f* est strictement positive sur l'intervalle $]x_N\,;+\infty[$ (on raisonnerait de façon similaire en supposant *f* strictement négative sur cet intervalle).
On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \geq \min(0, m)$ et les valeurs de l'intervalle $]-\infty\,;\min(0,m)[$ ne sont pas atteintes, ce qui est absurde d'après l'hypothèse de surjectivité de *f*.
L'équation $f(x)=0$ admet donc une infinité de solutions.

La fonction *f* s'annule une infinité de fois.

Question b.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Il convient de montrer que l'équation $f(x) = \alpha$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}_+$.

On se ramène à la situation précédente en posant :

$$f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - \alpha \end{cases}$$

Comme la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}_+$, il en va de même pour la fonction f_α.

Par ailleurs, pour tout réel *y*, l'équation $f_\alpha(x) = y$ est équivalente à l'équation $f(x) = y + \alpha$ qui admet au moins une solution dans $\mathbb{R}_+$ puisque *f* est surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
On en déduit, d'après la question précédente, que la fonction f_α s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}_+$: l'équation $f(x) = \alpha$ admet bien une infinité de solutions sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction *f* prend une infinité de fois chaque valeur de $\mathbb{R}$.