

- a) Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ , continue en 0 et vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ .  
Que peut-on dire de  $f$  ?
- b) Et si on ne suppose plus  $f$  continue en 0 ?

---

## Analyse

Dans la première question, la relation  $f(2x) = f(x)$  se réécrit  $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$  et on peut

facilement, pour tout réel  $x$  fixé, construire une suite de réels convergeant vers 0, point où nous savons  $f$  continue...

Dans la seconde question, on constate que le résultat obtenu à la première tombe... Un (ou plusieurs !) contre-exemple sera bien sûr plus que bienvenu !

---

## Résolution

### Question a.

Soit  $x$  appartenant à  $\mathbb{R}$ .

Considérons alors la suite géométrique  $(x_n)$  :

$$\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \end{cases}$$

La raison étant strictement inférieure à 1 en valeur absolue, on a immédiatement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ .

La fonction  $f$  étant continue en 0, on peut affirmer que la suite  $(f(x_n))$  converge vers  $f(0)$ .

On a  $f(x_0) = f(x)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_{n+1}) = f\left(\frac{x_n}{2}\right) = f(x_n)$ .

Une récurrence immédiate nous permet alors d'écrire :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = f(x_0) = f(x)$ . La suite  $(f(x_n))$  prend donc la valeur constante  $f(x)$ . Et comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(0)$ , on en déduit finalement :  $f(x) = f(0)$ .

Le résultat précédent étant valable pour tout  $x$  réel, la fonction  $f$  est constante.

La fonction  $f$  est constante.

**Question b.**

La question précédente nous conduit à un résultat précieux : toute fonction constante  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  (respectivement  $\mathbb{R}_-^*$ ) vérifie  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(2x) = f(x)$  (respectivement  $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, f(2x) = f(x)$ ).

On en déduit que toute fonction de la forme :

$$f : x \mapsto \begin{cases} k_- & \text{si } x < 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \\ k_+ & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où  $k_-$ ,  $f(0)$  et  $k_+$  sont des réels quelconques, vérifie :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ .

En choisissant  $k_- \neq k_+$  ou  $k_- = k_+ \neq f(0)$ , on obtient une fonction non continue en 0.

Notons que l'on a :  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow 2x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

La fonction indicatrice des rationnels :

$$1_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie bien :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ , mais elle n'est continue en aucun point de  $\mathbb{R}$ .