Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$.

Montrer que $\exists x_m > 0 \,/\, f(x_m) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} f(x)$.

Analyse

On s'intéresse aux valeurs prises par f sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il se peut que la fonction f ne prenne sur $\mathbb{R}_+^*$ que des valeurs inférieures ou égales à $f(0)$, auquel cas le résultat est immédiat. Dans le cas contraire, il existe un réel strictement positif a tel que $f(a) > f(0)$ et comme f tend vers $f(0)$ en $+\infty$, à partir d'un certain réel, f prendra nécessairement des valeurs strictement inférieures à $f(a)$…

Résolution

Dans un premier temps, nous supposons que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leq f(0)$.
Comme $f(0)$ est atteint en 0, il vient immédiatement : $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} f(x) = f(0)$ et on peut prendre, par exemple : $x_m = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) > f(0)$.
Posons alors $\varepsilon = \dfrac{f(a) - f(0)}{2}$. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$, il existe un réel positif A tel que :
$x > A \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Or :

$$
\begin{aligned}
& \left|f(x)-f(0)\right|<\varepsilon \\
\Leftrightarrow\ & -\varepsilon<f(x)-f(0)<\varepsilon \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{f(a)-f(0)}{2}+f(0)<f(x)<\frac{f(a)-f(0)}{2}+f(0) \\
\Rightarrow\ & f(x)<\frac{f(a)+f(0)}{2} \\
\Rightarrow\ & f(x)<f(a)
\end{aligned}
$$

Comme on a : $\forall x\in\left]A\,;+\infty\right[,\ f(x)<f(a)$, il vient immédiatement $a\in[0\,;A]$ et $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f(x)=\sup\limits_{x\in[0\,;A]} f(x)$. Or, f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, elle l'est en particulier sur $[0\,;A]$. Comme $[0\,;A]$ est un segment, f y est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc un réel $x_m\in[0\,;A]$ tel que $f(x_m)=\sup\limits_{x\in[0\,;A]} f(x)$. D'où : $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f(x)=\sup\limits_{x\in[0\,;A]} f(x)=f(x_m)$.

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

Si f est une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(0)$ alors il existe un réel positif x_m tel que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} f(x)=f(x_m)$.