Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de :

$$f(x)=\sqrt{4+\sin x}$$

Analyse

L'exercice ne présente pas de difficulté particulière : il s'agit de déterminer le développement limité d'une composée de deux fonctions. Il faut cependant faire attention à $f(0)$ …

Résolution

On a d'abord $f(0)=\sqrt{4}=2$.

Par ailleurs, nous disposons du développement limité à l'origine de $(1+x)^{\alpha}$. Il convient donc de transformer l'écriture de f pour faire apparaître une expression du type $(1+g(x))^{\alpha}$ avec $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$.

Il vient : $f(x)=\sqrt{4+\sin x}=\sqrt{4\left(1+\frac{\sin x}{4}\right)}=2\sqrt{1+\frac{\sin x}{4}}$. La fonction g « cherchée » est donc définie par : $g(x)=\frac{\sin x}{4}$ puisqu'on a bien : $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{4}\right)=g(0)=0$.

Le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $(1+x)^{\alpha}$ s'écrit :

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{24}x^4+\mathrm{o}(x^4)$$

Pour $\alpha=\frac{1}{2}$, on a en particulier : $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\mathrm{o}(x^4)$

Or, le développement limité en 0 à l'ordre 4 du sinus s'écrit : $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^4)$. Donc, le développement limité en 0 de $g(x)=\frac{\sin x}{4}$ s'écrit :

$$\sin x=\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}+\mathrm{o}(x^4)$$

Nous disposons désormais de tous les éléments pour mener le calcul :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{\sin x}{4}} &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}+o(x^4)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}+o(x^4)\right)^2\\ &\quad +\frac{1}{16}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}+o(x^4)\right)^3-\frac{5}{128}\left(\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}+o(x^4)\right)^4+o(x^4)\\ &= 1+\left(\frac{x}{8}-\frac{x^3}{48}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{16}-\frac{x^4}{48}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{x^3}{64}\right)-\frac{5}{128}\left(\frac{x^4}{256}\right)+o(x^4)\\ &= 1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{128}-\frac{61x^3}{3072}+\frac{241x^4}{98304}+o(x^4)\end{aligned}$$

Rappel : pour chaque élévation à une puissance donnée, on ne retient que les termes en x^n où n est inférieur ou égal à la puissance considérée (ici 4).

En multipliant par 2, on obtient finalement :

$$2\sqrt{1+\frac{\sin x}{4}} = 2+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}-\frac{61x^3}{1536}+\frac{241x^4}{49152}+o(x^4)$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x)=\sqrt{4+\sin x}$ s'écrit :

$$\sqrt{4+\sin x} = 2+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}-\frac{61x^3}{1536}+\frac{241x^4}{49152}+o(x^4)$$