Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de :

$$f(x)=\sqrt{2-\cos x}$$

Analyse

L'exercice ne présente pas de difficulté particulière : il s'agit de déterminer le développement limité d'une composée de deux fonctions. Il faut cependant faire attention à $f(0)$ …

Résolution

On a d'abord $f(0)=\sqrt{2-1}=1$.

Par ailleurs, nous disposons du développement limité à l'origine de $(1+x)^{\alpha}$ à l'ordre *n*.

On commence par écrire le développement limité en 0 à l'ordre 5 de la fonction cosinus :

$$2-\cos x=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right) \text{ (le terme suivant est « en } x^6 \text{ »).}$$

Le développement limité en 0 à l'ordre *n* de $(1+x)^{\alpha}$ s'écrit :

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{o}(x^n)$$

Comme nous allons l'utiliser avec $\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}$ en lieu et place de *x*, il nous suffit de le mener à l'ordre 2 puisque les termes $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^m$ avec $m\geq 3$ fourniraient des puissances de *x* supérieures ou égales à $2\times 3=6$. Dans ces conditions, on utilise : $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{2-\cos x} &= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)^2+\mathrm{o}\left(x^5\right)\\ &= 1+\frac{1}{4}x^2+\left(-\frac{1}{48}-\frac{1}{32}\right)x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\\ &= 1+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{96}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 5 de $f(x)=\sqrt{2-\cos x}$ s'écrit :

$$\sqrt{2-\cos x}=1+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{96}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)$$