Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 6 de :

$$f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)$$

Analyse

Il s'agit ici de déterminer le développement limité d'une composée de deux fonctions.

Résolution

On va utiliser le développement limité en 0 de la fonction *g* définie par $g(x) = \ln(1+x)$.
Nous le menons à l'ordre 6 car nous allons remplacer « *x* » par « $x + x^2$ » pour obtenir celui de la fonction *f*. *x* étant présent dans la somme « $x + x^2$ », toute puissance de cette somme fournira la même puissance de *x* (par exemple : $\left(x+x^2\right)^3$ fournit, entre autre, le terme x^3).

On part donc de :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1+x+x^2\right) &= \left(x+x^2\right) - \frac{\left(x+x^2\right)^2}{2} + \frac{\left(x+x^2\right)^3}{3} - \frac{\left(x+x^2\right)^4}{4} \\
&\quad + \frac{\left(x+x^2\right)^5}{5} - \frac{\left(x+x^2\right)^6}{6} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\
&= x + x^2 - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2x^3 + x^4\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + 3x^4 + 3x^5 + x^6\right) \\
&\quad - \frac{1}{4}\left(x^4 + 4x^5 + 6x^6\right) + \frac{1}{5}\left(x^5 + 5x^6\right) - \frac{1}{6}x^6 + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\
&= x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}\right)x^4 \\
&\quad + \left(1 - 1 + \frac{1}{5}\right)x^5 + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{6}\right)x^6 + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\
&= x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + \mathrm{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $f(x)=\ln\left(1+x+x^2\right)$ s'écrit :

$$\ln\left(1+x+x^2\right)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)$$