Déterminez le développement limité en 0 à l'ordre 6 de :

$$f(x) = \sin\left(x + x^2\right)$$

Analyse

Il s'agit ici de déterminer le développement limité d'une composée de deux fonctions.

Résolution

On va utiliser le développement limité en 0 de la fonction sinus. Nous le menons à l'ordre 6 car nous allons remplacer « x » par « $x + x^2$ » pour obtenir celui de la fonction *f*. *x* étant présent dans la somme « $x + x^2$ », toute puissance de cette somme fournira la même puissance de *x* (par exemple : $\left(x + x^2\right)^3$ fournit, entre autre, le terme x^3).

On part donc de :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + x^2\right) &= \left(x + x^2\right) - \frac{\left(x + x^2\right)^3}{6} + \frac{\left(x + x^2\right)^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\
&= x + x^2 - \frac{1}{6}\left(x^3 + 3x^4 + 3x^5 + x^6\right) + \frac{1}{120}\left(x^5 + 5x^6\right) + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\
&= x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{120}\right)x^5 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right)x^6 + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\
&= x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{59}{120}x^5 - \frac{1}{8}x^6 + \mathrm{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Remarque : ce résultat illustre le fait que, contrairement à l'idée parfois reçue, les coefficients de la partie régulière d'un développement limité ne vont pas nécessairement en se complexifiant !

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $f(x) = \sin\left(x + x^2\right)$ s'écrit :

$$\sin\left(x + x^2\right) = x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{59}{120}x^5 - \frac{1}{8}x^6 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$