Déterminer les développements limités en 0 à l'ordre 6 des fonctions suivantes :

$$f_{1,1}(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$$
$$f_{1,-1}(x)=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$$
$$f_{-1,-1}(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$$

Analyse

Il s'agit ici de déterminer les développements limités de composées de fonctions. On note que la fonction $f_{-1,1}$ définie par $f_{-1,1}(x)=\sqrt{1-\sqrt{1+x^2}}$ n'est pas définie sur un voisinage de 0 puisqu'elle n'est définie qu'en 0 ! D'où son absence …

Résolution

En guise de préambule, nous devons souligner que :

$$f_{1,1}(0)=f_{1,-1}(0)=\sqrt{2} \text{ et } f_{-1,-1}(0)=0$$

Le développement limité à l'origine de $f_{-1,-1}$ ne comportera donc pas de terme constant.

Dans un premier temps, déterminons les développements limités des fonctions $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$. Pour ne mener qu'un calcul (soyons économes !) nous introduisons la fonction f_α définie par : $f_\alpha(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha x^2}}$ avec $\alpha=\pm 1$.

On a alors simplement : $f_{1,1}(x)=f_1(x)$ et $f_{1,-1}(x)=f_{-1}(x)$.

A partir du développement limité en 0 à l'ordre 3 de $(1+x)^m$, nous allons d'abord déterminer celui de $\sqrt{1+\alpha x^2}=\left(1+\alpha x^2\right)^{\frac{1}{2}}$. L'ordre 3 est suffisant ici puisque la « véritable » variable est x^2.

On a : $(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Il vient alors, en tenant compte de $\alpha^2=1$:

$$\sqrt{1+\alpha x^2}=\left(1+\alpha x^2\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\alpha x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}1+\sqrt{1+\alpha x^2}&=2+\frac{1}{2}\alpha x^2-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\\&=2\left(1+\frac{1}{4}\alpha x^2-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $(1+x)^m$ avec $m=\frac{1}{2}$, il vient :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{1+\alpha x^2}}&=\sqrt{2\left(1+\frac{1}{4}\alpha x^2-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)}\\&=\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}\alpha x^2-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)}\\&=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{4}\alpha x^2-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\alpha x^2-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\alpha x^2-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)^2\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\alpha x^2-\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{32}\alpha x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)^3\right)\\&=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}\alpha x^2-\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{64}\alpha x^6-\frac{1}{8}\left(\frac{x^4}{16}-\frac{\alpha x^6}{32}\right)+\frac{1}{16}\left(\frac{\alpha x^6}{64}\right)+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)\\&=\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha x^2}{8}+\left(-\frac{1}{32}-\frac{1}{128}\right)x^4+\left(\frac{\alpha}{64}+\frac{\alpha}{256}+\frac{\alpha}{1024}\right)x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)\\&=\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha x^2}{8}-\frac{5x^4}{128}+\frac{21\alpha x^6}{1024}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)\\&=\sqrt{2}+\frac{\alpha x^2}{4\sqrt{2}}-\frac{5x^4}{64\sqrt{2}}+\frac{21\alpha x^6}{512\sqrt{2}}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\end{aligned}$$

Pour $\alpha=-1$ et $\alpha=1$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}&=\sqrt{2}-\frac{x^2}{4\sqrt{2}}-\frac{5x^4}{64\sqrt{2}}-\frac{21x^6}{512\sqrt{2}}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\\\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}&=\sqrt{2}+\frac{x^2}{4\sqrt{2}}-\frac{5x^4}{64\sqrt{2}}+\frac{21x^6}{512\sqrt{2}}+\mathrm{o}\left(x^6\right)\end{aligned}$$

Déterminons maintenant le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $f_{-1,-1}(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

Si nous procédons comme précédemment, nous écrivons :

$$\sqrt{1-x^2} = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned} 1-\sqrt{1-x^2} &= \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= \frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \end{aligned}$$

En considérant alors la racine carrée de cette expression, nous allons être confrontés à une « difficulté » :

En effet, nous voyons apparaître le facteur $\frac{|x|}{\sqrt{2}}$ … Les signes des coefficients du développement limité changeraient donc selon le signe de x ? Ceci est en contradiction flagrante avec l'unicité du développement limité en un point !
En fait, nous allons obtenir effectivement non pas un mais deux développements limités : l'un à gauche de 0 et l'autre à droite. Tout simplement parce que $f_{-1,-1}$ n'est pas dérivable en 0 (ce que nous allons voir immédiatement). En revanche, puisqu'elle l'est à gauche et à droite, nous pouvons déterminer les développements limités correspondants.

Pour $x \in]-1\,;0[\cup]0\,;1[$, on a :

$$f'_{-1,-1}(x) = \frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}}$$

Pour $x \in]-1\,;0[$, on a $\sqrt{x^2} = -x$ et $f'_{-1,-1}(x) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(f'_{-1,-1}(x)\right) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Et pour $x \in]0\,;1[$, on a $\sqrt{x^2} = x$ et $f'_{-1,-1}(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(f'_{-1,-1}(x)\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f_{-1,-1}$ n'est donc pas dérivable en 0 MAIS est dérivable à gauche et à droite de 0.

En reprenant : $1-\sqrt{1-x^2}=\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)\right)$, il vient :

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}&=\frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)\right)\right)\\&=\frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{8}x^2+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{128}\right)x^4+o\left(x^5\right)\right)\\&=\frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{128}x^4+o\left(x^5\right)\right)\end{aligned}$$

Note : nous avons fait apparaître des « $o\left(x^5\right)$ » puisque le terme suivant le terme en « x^4 » est en « x^6 ».

Finalement :

A gauche de 0 : $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x^2}{8\sqrt{2}}-\frac{7x^4}{128\sqrt{2}}+o\left(x^6\right)$

A droite de 0 : $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{8\sqrt{2}}+\frac{7x^4}{128\sqrt{2}}+o\left(x^6\right)$

Résultat final

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{2}-\frac{x^2}{4\sqrt{2}}-\frac{5x^4}{64\sqrt{2}}-\frac{21x^6}{512\sqrt{2}}+o\left(x^6\right)$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{2}+\frac{x^2}{4\sqrt{2}}-\frac{5x^4}{64\sqrt{2}}+\frac{21x^6}{512\sqrt{2}}+o\left(x^6\right)$$

et

A gauche de 0 : $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x^2}{8\sqrt{2}}-\frac{7x^4}{128\sqrt{2}}+o\left(x^6\right)$

A droite de 0 : $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{8\sqrt{2}}+\frac{7x^4}{128\sqrt{2}}+o\left(x^6\right)$