Déterminez le développement limité en 1 à l'ordre 3 de :

$$f(x)=\sqrt{3+x}$$

Analyse

Il s'agit ici de déterminer le développement limité d'une composée de deux fonctions. Il faut faire attention à la valeur prise par la fonction au point.

Résolution

On a d'abord : $f(1)=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$.

On se ramène à un développement limité à l'origine en posant : $x=1+h$. On a alors :

$$f(x)=f(1+h)=\sqrt{3+(1+h)}=\sqrt{4+h}=2\sqrt{1+\frac{h}{4}}$$

On utilise alors le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $(1+x)^m$ avec $m=\frac{1}{2}$:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o\left(x^3\right)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} f(1+h)&=2\sqrt{1+\frac{h}{4}}\\ &=2\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{h}{4}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{h}{4}\right)^3\right)+o\left(h^3\right)\\ &=2+\frac{h}{4}-\frac{h^2}{64}+\frac{h^3}{512}+o\left(h^3\right)\end{aligned}$$

On revient finalement à la variable d'origine en remplaçant h par $x-1$ et on obtient finalement :

$$f(x)=2+\frac{x-1}{4}-\frac{(x-1)^2}{64}+\frac{(x-1)^3}{512}+o\left((x-1)^3\right)$$

Résultat final

Le développement limité en 1 à l'ordre 3 de $f(x)=\sqrt{3+x}$ s'écrit :

$$\sqrt{3+x}=2+\frac{x-1}{4}-\frac{(x-1)^2}{64}+\frac{(x-1)^3}{512}+o\left((x-1)^3\right)$$