

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de :

$$f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^m \text{ où } m \text{ est un réel non nul}$$

Analyse

On note d'abord que le rapport $\frac{1+x}{1-x}$ est défini et strictement positif sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Les deux monômes $1+x$ et $1-x$ y sont, par ailleurs, strictement positifs. En se plaçant sur le voisinage $] -1, 1[$ de l'origine, on peut manipuler sans risque l'expression de f .

Il s'agit ici de déterminer le développement limité d'un rapport de deux fonctions. Plusieurs approches sont envisageables : utiliser $f(x) = (1+x)^m (1-x)^{-m}$ (cette nouvelle écriture est licite d'après ce qui précède) et effectuer le produit de deux développements limités connus ou commencer par déterminer le développement limité du rapport $\frac{1+x}{1-x}$ pour l'élever ensuite à la puissance m . Nous développons les deux approches : à vous de juger ...

Résolution

1^{ère} approche : effectuer un produit de développements limités

On a le développement limité classique, à l'ordre 4 :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}x^4 + o(x^4)$$

On en tire alors celui de $(1-x)^{-m}$:

$$(1-x)^{-m} = 1 + mx + \frac{m(m+1)}{2}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{6}x^3 + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24}x^4 + o(x^4)$$

Attention ! Il faut ici prendre garde de ne pas « oublier » un signe négatif ...

En effectuant le produit de ces développements limités, il vient :

$$\begin{aligned}
 (1+x)^m (1-x)^{-m} &= 1 + 2mx + \left(\frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + m^2 \right) x^2 \\
 &+ \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \frac{m(m+1)(m+2)}{6} + \frac{m^2(m+1)}{2} + \frac{m^2(m-1)}{2} \right) x^3 \\
 &+ \left(\frac{m^2(m+1)(m-1)}{4} + \frac{m^2(m+1)(m+2)}{6} + \frac{m^2(m-1)(m-2)}{6} \right. \\
 &\left. + \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24} \right) x^4 + o(x^4) \\
 &= 1 + mx + 2m^2 x^2 + \left(\frac{4}{3} m^3 + \frac{2}{3} m \right) x^3 + \left(\frac{2}{3} m^4 + \frac{4}{3} m^2 \right) x^4 + o(x^4) \\
 &= 1 + mx + 2m^2 x^2 + \frac{2}{3} m(2m^2 + 1) x^3 + \frac{2}{3} m^2(m^2 + 2) x^4 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^m = 1 + mx + 2m^2 x^2 + \frac{2}{3} m(2m^2 + 1) x^3 + \frac{2}{3} m^2(m^2 + 2) x^4 + o(x^4)$$

2^{ème} approche : élever le rapport à la puissance m

Le développement limité en 0 à l'ordre 4 du rapport $\frac{1+x}{1-x}$ est donné par la division de $1+x$ par $1-x$ suivant les puissances croissantes à l'ordre 4. On a facilement :

$$1 + x = (1-x)(1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4) + 2x^5$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \frac{1+x}{1-x} &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \frac{2x^5}{1-x} \\
 &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^4 \frac{x}{1-x} \\
 &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + x^4 \varepsilon(x) \\
 &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^m = \left(1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + o(x^4) \right)^m$$

Le premier terme non constant de l'argument de la puissance étant $2x$, on doit retenir toutes les puissances de $2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4$ jusqu'à la quatrième :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m &= \left(1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + o(x^4)\right)^m \\
 &= 1 + m(2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + o(x^4)) + \frac{m(m-1)}{2}(2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + o(x^4))^2 \\
 &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}(2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + o(x^4))^3 \\
 &\quad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{24}(2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + o(x^4))^4 + o(x^4) \\
 &= 1 + 2mx + (2m + 2m(m-1))x^2 + \left(2m + 4m(m-1) + \frac{4m(m-1)(m-2)}{3}\right)x^3 \\
 &\quad + \left(2m + 2m(m-1) + 4m(m-1) + 4m(m-1)(m-2) + \frac{2}{3}m(m-1)(m-2)(m-3)\right)x^4 + o(x^4) \\
 &= 1 + 2mx + 2m^2x^2 + \frac{2}{3}m(2m^2 + 1)x^3 + \frac{2}{3}m^2(m^2 + 2)x^4 + o(x^4)
 \end{aligned}$$

On a retrouvé le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m$ s'écrit :

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m = 1 + 2mx + 2m^2x^2 + \frac{2}{3}m(2m^2 + 1)x^3 + \frac{2}{3}m^2(m^2 + 2)x^4 + o(x^4)$$