Déterminez le développement limité en 0 à l'ordre 6 de :

$$f(x) = e^{x\sin x}$$

Analyse

Il s'agit ici de déterminer le développement limité d'une composée de deux fonctions.

Résolution

On note d'abord que $f(0) = e^0 = 1$.

On commence par fournir le développement limité en 0 à l'ordre 6 du produit $x\sin x$.

A partir de : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)$, il vient :

$$x\sin x = x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + o\left(x^7\right)$$

Comme le premier terme est en x^2, nous allons utiliser le développement limité de l'exponentielle à l'ordre 3 (puisque les termes suivants donneraient des puissances de x supérieures ou égales à 8) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

La composition des développements limités s'écrit alors :

$$\begin{aligned} e^{x\sin x} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + o\left(x^7\right)\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + o\left(x^7\right)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^6}{120} + o\left(x^7\right)\right)^3 + o\left(x^7\right) \\ &= 1 + x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^4 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^6 + o\left(x^7\right) \\ &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{120} + o\left(x^7\right) \end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $f(x) = e^{x\sin x}$ s'écrit :

$$e^{x\sin x} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{120} + o\left(x^7\right)$$