Déterminer le développement limité en 1 à l'ordre 6 de :

$$f(x) = x\ln x - x$$

Analyse

Il s'agit essentiellement ici de déterminer le développement limité d'un produit de deux fonctions. Deux approches sont proposées : la première est directe et consiste à se ramener à l'origine. La seconde consiste à travailler sur la dérivée de la fonction puis à intégrer son développement limité en 1.

Résolution

En guise de préambule, on a : $f(1) = 1\times\ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

1ère approche : calcul direct

On se ramène au calcul d'un développement limité à l'origine en posant : $x = 1+h$. On a alors : $f(x) = f(1+h) = (1+h)\ln(1+h) - (1+h)$.

On doit donc partir du développement limité de $\ln(1+h)$ en 0 à l'ordre 6 :

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^6}{6} + o\left(h^6\right)$$

qui donne :

$$h\ln(1+h) = h^2 - \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{3} - \frac{h^5}{4} + \frac{h^6}{5} + o\left(h^6\right)$$

On en tire alors :

$$\begin{aligned}
f(1+h) &= (1+h)\ln(1+h) - (1+h) \\
&= \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^6}{6} + o\left(h^6\right)\right) + \left(h^2 - \frac{h^3}{2} + \frac{h^4}{3} - \frac{h^5}{4} + \frac{h^6}{5} + o\left(h^6\right)\right) - (1+h) \\
&= -1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)h^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)h^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)h^4 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)h^5 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)h^6 + o\left(h^6\right) \\
&= -1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{12} - \frac{h^5}{20} + \frac{h^6}{30} + o\left(h^6\right)
\end{aligned}$$

Soit, finalement :

$$f(x) = -1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20} + \frac{(x-1)^6}{30} + o\left((x-1)^6\right)$$

2^ème^ approche : utiliser la dérivée

Sans avoir nécessairement reconnu une primitive classique, la forme simple de *f* peut conduire à en calculer la dérivée.

On a : $f'(x) = (x \ln x)' - 1 = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

On a alors, en posant à nouveau : $x = 1 + h$, $f'(x) = f'(1+h) = \ln(1+h)$.

Or on a : $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \frac{h^5}{5} + o(h^5)$.

Pour obtenir $f(x) = f(1+h)$, il suffit donc d'intégrer ce développement limité sans oublier la constante d'intégration qui n'est rien d'autre que $f(1) = -1$. Il vient directement :

$$f(1+h) = -1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{12} - \frac{h^5}{20} + \frac{h^6}{30} + o(h^6)$$

On a retrouvé le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

Le développement limité en 1 à l'ordre 6 de $f(x) = x \ln x - x$ s'écrit :

$$x \ln x - x = -1 + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} - \frac{(x-1)^5}{20} + \frac{(x-1)^6}{30} + o\left((x-1)^6\right)$$