

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de :

$$f(x) = \arccos(x)$$

Analyse

On va ici utiliser le fait que l'on peut travailler plus simplement sur la dérivée de la fonction.

Résolution

$$\text{On a : } f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

On va donc pouvoir utiliser le développement limité « standard » :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + o(x^k)$$

$$\text{avec } m = -\frac{1}{2}.$$

A quel ordre doit-on effectuer ce développement limité ?

Puisque nous allons déterminer le développement limité de la composée des deux fonctions $x \mapsto -x^2$ et $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{2}}$, le développement limité obtenu ne comportera que des puissances paires de x . En l'intégrant, et en tenant compte du fait que $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, le développement limité finalement obtenu ne comportera que des puissances impaires de x en dehors du terme constant. Pour obtenir un développement limité à l'ordre $2n+1$, celui de la dérivée doit être mené à l'ordre $2n$. On doit partir du développement limité de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre n .

On a donc pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} (1+x)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \dots + \frac{\overbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}^{n \text{ facteurs}}}{n!}x^n + o(x^n) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

En remplaçant x par $-x^2$ (composition des fonctions), il vient :

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{(-x^2)}{2} + \frac{3(-x^2)^2}{8} - \frac{5(-x^2)^3}{16} + \dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} (-x^2)^n + o\left((-x^2)^n\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} (-1)^n x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots + \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \end{aligned}$$

On peut simplifier cette écriture en notant que :

$$\begin{aligned} 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-2)(2n-1)(2n)}{\underbrace{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n}_{n \text{ facteurs}}} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} &= -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} - \dots - \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{1}{2^n n!} x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \\ &= -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{8} - \dots - \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{2n} + o\left(x^{2n}\right) \end{aligned}$$

En intégrant et en tenant compte de $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, il vient finalement :

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \dots - \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $f(x) = \arccos(x)$ s'écrit :

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \dots - \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$$