Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de :

$$f(x) = \arg\sinh(x)$$

Analyse

On va ici utiliser le fait que l'on peut travailler plus simplement sur la dérivée de la fonction.

Résolution

On a : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$.

On va donc pouvoir utiliser le développement limité « standard » :

$$\left(1+x\right)^m = 1 + mx + \frac{m\left(m-1\right)}{2}x^2 + \dots + \frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\dots\left(m-k+1\right)}{k!}x^k + o\left(x^k\right)$$

avec $m = -\dfrac{1}{2}$.

A quel ordre doit-on effectuer ce développement limité ?

Puisque nous allons déterminer le développement limité de la composée des deux fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}}$, le développement limité obtenu ne comportera que des puissances paires de *x*. En l'intégrant, et en tenant compte du fait que $\arg\sinh(0) = 0$, le développement limité finalement obtenu ne comportera que des puissances impaires de *x*. Pour obtenir un développement limité à l'ordre $2n+1$, celui de la dérivée doit être mené à l'ordre $2n$. On doit partir du développement limité de $\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}}$ à l'ordre *n*.

On a donc pour $n > 0$:

$$\begin{aligned}\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \dots + \underbrace{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}}_{n\text{ termes}}x^n + o\left(x^n\right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \dots + \left(-1\right)^n \frac{1\times 3\times 5\times\dots\times\left(2n-1\right)}{2^n n!}x^n + o\left(x^n\right)\end{aligned}$$

En remplaçant x par x^2 (composition des fonctions), il vient :

$$\begin{aligned}
\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1-\frac{\left(x^2\right)}{2}+\frac{3\left(x^2\right)^2}{8}-\frac{5\left(x^2\right)^3}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2^n n!}\left(x^2\right)^n+o\left(\left(-x^2\right)^n\right)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}-\frac{5x^6}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}-\frac{5x^6}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)
\end{aligned}$$

On peut simplifier cette écriture en notant que :

$$\begin{aligned}
1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1) &= \frac{1\times 2\times 3\times\ldots\times(2n-2)(2n-1)(2n)}{\underbrace{2\times 4\times 6\times\ldots\times 2n}_{n\text{ termes}}}\\
&= \frac{(2n)!}{2^n\left(1\times 2\times 3\times\ldots\times n\right)}\\
&= \frac{(2n)!}{2^n n!}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}-\frac{5x^6}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^n n!}\frac{1}{2^n n!}x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}-\frac{5x^6}{16}+\ldots+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}+o\left(x^{2n}\right)
\end{aligned}$$

En intégrant et en tenant compte de $\arg\sinh(0)=0$, il vient finalement :

$$\arg\sinh x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}+\ldots+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $f(x)=\arg\sinh(x)$ s'écrit :

$$\arg\sinh x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}-\frac{5x^7}{112}+\ldots+(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$