Déterminer le développement limité en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 5 de :

$$f(x) = \cos(2x)$$

Analyse

L'exercice ne pose pas de difficulté particulière : on effectue un changement de variable pour se ramener à un développement limité à l'origine.

Résolution

On pose donc : $x = \frac{\pi}{4} + h$.

Il vient alors :

$$\cos(2x) = \cos\left(2\left(\frac{\pi}{4} + h\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) = -\sin(2h)$$

Il convient donc d'effectuer le développement limité à l'origine à l'ordre 5 de $\sin(2h)$

A partir du développement limité à l'origine à l'ordre 5 du sinus :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o\left(x^6\right)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\sin(2h) &= 2h - \frac{(2h)^3}{6} + \frac{(2h)^5}{120} + o\left(h^6\right)\\ &= 2h - \frac{8h^3}{6} + \frac{32h^5}{120} + o\left(h^6\right)\\ &= 2h - \frac{4h^3}{3} + \frac{4h^5}{15} + o\left(h^6\right)\end{aligned}$$

D'où :

$$-\sin(2h) = -2h + \frac{4h^3}{3} - \frac{4h^5}{15} + o\left(h^6\right)$$

En revenant à la variable d'origine grâce à $h = x - \frac{\pi}{4}$, on obtient finalement :

$$\cos(2x) = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{4}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6\right)$$

Résultat final

Le développement limité en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 5 de $f(x) = \cos(2x)$ s'écrit :

$$\cos(2x) = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 - \frac{4}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^6\right)$$