Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de :

$$f(x)=\arcsin\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$$

Analyse

La présence de la fonction arcsin requiert de dériver la fonction *f* et de donner un développement limité de la dérivée à l'ordre 3. Classiquement, on doit, en intégrant, ne pas oublier la valeur de la fonction au point …

Résolution

On a immédiatement : $f(0)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

On peut déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction *f*.

On trouve : $\mathscr{D}_f=\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

On va alors se placer sur un intervalle I centré en 0 et tel que le numérateur et le dénominateur du rapport $\frac{1+x}{2+x}$ soient strictement positifs. On peut, par exemple, choisir $\mathrm{I}=\left]-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right[$.

Soit alors la fonction *u* définie sur I par : $u:x\mapsto\frac{1+x}{2+x}$.

La fonction *u* est dérivable sur I et on a : $u'(x)=\frac{1+x}{2+x}=\frac{2+x-(1+x)}{(2+x)^2}=\frac{1}{(2+x)^2}$.

On peut alors dériver la fonction *f* comme composée de *u* et de arcsin :

$$f'(x)=\frac{1}{(2+x)^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^2}}$$

Puisque l'on travaille sur I, on a : $2+x>0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(2+x)^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^2}}\\
&= \frac{1}{(2+x)^2}\times(2+x)\times\frac{1}{\sqrt{(2+x)^2-(1+x)^2}}\\
&= \frac{1}{(2+x)\sqrt{3+2x}}\\
&= \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)\sqrt{3}\sqrt{1+\frac{2x}{3}}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\times\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Puisque nous devrons intégrer le développement limité de la dérivée pour obtenir un développement limité de *f* à l'ordre 4, nous allons développer f' à l'ordre 3.

On va donc commencer par développer $\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}$ et $\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} &= 1+(-1)\times\frac{x}{2}+\frac{(-1)\times(-2)}{2!}\times\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{(-1)\times(-2)\times(-3)}{3!}\times\left(\frac{x}{2}\right)^3+o\left(x^3\right)\\
&= \underline{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+o\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2x}{3}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\times\left(\frac{2x}{3}\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\times\left(\frac{2x}{3}\right)^3\\
&= \underline{1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{6}-\frac{5x^3}{54}+o\left(x^3\right)}
\end{aligned}$$

On effectue alors le produit des deux développements limités obtenus ci-dessus :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} &= \left(1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{6}-\frac{5x^3}{54}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+o\left(x^3\right)\right)\\ &= 1+\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^2+\left(-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{5}{54}\right)x^3+o\left(x^3\right)\\ &= \underline{1-\frac{5}{6}x+\frac{7}{12}x^2-\frac{83}{216}x^3+o\left(x^3\right)}\end{aligned}$$

En intégrant et en tenant compte de $f(0)=\frac{\pi}{6}$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(x-\frac{5}{12}x^2+\frac{7}{36}x^3-\frac{83}{864}x^4\right)+o\left(x^4\right)\\ &= \frac{\pi}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}x-\frac{5}{24\sqrt{3}}x^2+\frac{7}{72\sqrt{3}}x^3-\frac{83}{1728\sqrt{3}}x^4+o\left(x^4\right)\\ &= \underline{\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}x-\frac{5\sqrt{3}}{72}x^2+\frac{7\sqrt{3}}{216}x^3-\frac{83\sqrt{3}}{5184}x^4+o\left(x^4\right)}\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x)=\arcsin\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$ s'écrit :

$$\arcsin\left(\frac{1+x}{2+x}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6}x-\frac{5\sqrt{3}}{72}x^2+\frac{7\sqrt{3}}{216}x^3-\frac{83\sqrt{3}}{5184}x^4+o\left(x^4\right)$$