Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 4 de :

$$f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$$

Analyse

Lorsque l'on s'intéresse à la limite de la fonction f en 0 (premier terme du développement limité) on a affaire à une forme indéterminée que l'on commence par lever.
La « technique » utilisée pour lever l'indétermination permet également d'obtenir le développement limité recherché …

Résolution

Pour tout x réel, on a : $1+\sin x \geq 0$.

Pour x différent de $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on peut donc poser $g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x}\ln(1+\sin x)$.

En 0, on a : $1+\sin x = 1 + x + o(x^2)$.

On en déduit alors, toujours en 0 : $\ln(1+\sin x) = x + o(x)$.

D'où : $g(x) = \frac{1}{x}\ln(1+\sin x) = 1 + o(1)$.

Soit : $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \ln f(x) = 1$ et, finalement : $\lim_{x\to 0} f(x) = e$.

Le calcul précédent suggère de travailler d'abord avec la fonction g.
Puisqu'il faudra en considérer l'exponentielle, nous allons déterminer le développement limité de g en 0 à l'ordre 4.
La fonction g étant le produit de la fonction inverse et de la fonction $x \mapsto \ln(1+\sin x)$, on doit développer cette dernière à l'ordre 5.

On commence donc par développer la fonction sinus à l'ordre 5 en 0. On a classiquement :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

On utilise alors : $\ln(1+x)=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)$ et on obtient, en composant les développements limités :

$$\begin{aligned}\ln(1+\sin x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^3\\ &\quad -\frac{1}{4}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^4+\frac{1}{5}\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^5+o(x^5)\\ &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(x^4\right)+\frac{1}{5}\left(x^5\right)+o(x^5)\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{24}+o(x^5)\end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

On doit alors composer ce résultat avec le développement limité de l'exponentielle en 1 :

En posant $x=1+h$, on a facilement : $e^x=e^{1+h}=e\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\frac{h^4}{24}+\frac{h^5}{120}\right)+o(h^5)$

On peut écrire :

$$\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)=1+h+o(h^4) \text{ avec : } h=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}$$

Il vient donc :

$$\begin{aligned}f(x) &= e+e\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{e}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}\right)^2\\ &\quad +\frac{e}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}\right)^3+\frac{e}{24}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^4}{24}\right)^4+o(x^4)\\ &= e-\frac{e}{2}x+e\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)x^2+e\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{48}\right)x^3+e\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{72}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{384}\right)x^4+o(x^4)\\ &= \underline{e-\frac{e}{2}x+\frac{7e}{24}x^2-\frac{3e}{16}x^3+\frac{139e}{1152}x^4+o(x^4)}\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ s'écrit :

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 - \frac{3e}{16}x^3 + \frac{139e}{1152}x^4 + o\left(x^4\right)$$