Déterminer le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x + \dfrac{2x}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Analyse

On peut classiquement développer l'exponentielle et factoriser par x le dénominateur de la fraction. On est alors ramené au calcul de l'inverse d'un développement limité.

Résolution

Du fait de la factorisation par x, on va développer l'exponentielle à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned} e^{2x}-1 &= 1+2x+\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{6}(2x)^3+\frac{1}{24}(2x)^4+\frac{1}{120}(2x)^5+o(x^5)-1 \\ &= 2x\left(1+x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^4+o(x^4)\right) \end{aligned}$$

Il vient alors, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{e^{2x}-1} &= \frac{2x}{2x\left(1+x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^4+o(x^4)\right)} \\ &= \left(1+x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^4+o(x^4)\right)^{-1} \\ &= 1-\left(x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^4\right)+\left(x^2+\frac{4}{9}x^4+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4\right)-\left(x^3+2x^4\right)+x^4+o(x^4) \\ &= 1-x+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4+o(x^4) \end{aligned}$$

On en tire finalement :

$$f(x) = 1+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4+o(x^4)$$

Résultat final

Le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x + \dfrac{2x}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

s'écrit :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 + o\left(x^4\right)$$