Déterminer le développement limité à l'origine à l'ordre 2 de la fonction *f* définie par :

$$f : x \mapsto \left(1-x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$$

Analyse

On écrit *f* sous forme exponentielle et on peut commencer par déterminer la limite de *f* en 0.
On doit ensuite déterminer le développement limité d'une composée.

Résolution

Remarquons d'abord que l'on a, pour tout *x* réel : $1-x+x^2>0$. Ainsi, la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}^*$ et on a , pour tout *x* réel :

$$f(x) = \left(1-x+x^2\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x}}$$

Or, on a : $\ln\left(1-x+x^2\right) \underset{0}{\sim} -x$ et donc : $\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{-x}{x} = -1$, soit : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x} = -1$.

On en déduit alors, par composition : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ qui correspond au premier terme du développement limité cherché.

Du fait de la division par *x* dans l'expression $\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x}$, on va commencer par donner le développement limité à l'origine de la fonction $x \mapsto \ln\left(1-x+x^2\right)$ à l'ordre 3.
Comme $-x+x^2 = \mathrm{o}(1)$ au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(1-x+x^2\right) &= \left(-x+x^2\right) - \frac{1}{2}\left(-x+x^2\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-x+x^2\right)^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= -x+x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

On a alors immédiatement :

$$\begin{aligned}\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x} &= \frac{1}{x}\left\{-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right\}\\ &= -1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{\frac{\ln\left(1-x+x^2\right)}{x}}\\ &= e^{-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)}\\ &= e^{-1}\times e^{\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)}\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2=\mathrm{o}(1)$ au voisinage de 0, on a, en utilisant le développement limité de l'exponentielle à l'origine à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}e^{\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)} &= 1+\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2\right)^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}x+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\right)x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\\ &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{19}{24}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Finalement, en multipliant par $\frac{1}{e}$:

$$f(x)=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{19}{24}x^2\right)+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$

Résultat final

Le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de : $f: x \mapsto \left(1-x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$ s'écrit :

$$f(x)=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{19}{24}x^2\right)+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$