Déterminer le développement limité à l'origine à l'ordre 3 de la fonction *f* définie par :

$$f : x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$$

Analyse

On écrit *f* sous forme exponentielle. On doit réfléchir aux ordres auxquels on mène les divers développements limités intervenant dans le calcul. On notera éventuellement la parité de la fonction *f* …

Résolution

On peut travailler sur l'ensemble $D =]-\pi\,;0[\cup]0\,;+\pi[$ sur lequel on a : $\frac{\sin x}{x} > 0$.

Pour tout réel *x* de *D*, on a alors :

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}} = e^{\frac{2}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$

Pour obtenir un DL à l'ordre 3, il convient d'obtenir un DL à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \frac{2}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. Mais du fait de la multiplication par $\frac{2}{x^2}$, il nous faut fournir un DL à l'ordre 5 de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ et, finalement, un DL à l'ordre 5 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

A partir du développement classique : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$, on a :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

Comme $-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}=\mathrm{o}(1)$ au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left\{1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right\} \\
&= \left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= -\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= -\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^4}{72}+\mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= -\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{180}+\mathrm{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Puis :

$$\frac{2}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{x^2}\left\{-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{180}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right\}=-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{90}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{\frac{2}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)} \\
&= e^{-\frac{1}{3}+\frac{x^2}{90}+\mathrm{o}\left(x^3\right)} \\
&= e^{-\frac{1}{3}}\times e^{\frac{x^2}{90}+\mathrm{o}\left(x^3\right)} \\
&= e^{-\frac{1}{3}}\times\left(1+\frac{x^2}{90}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)
\end{aligned}$$

Remarque : on constate que le développement obtenu ne comporte que des termes pairs … Il n'y a rien d'étonnant à cela puisque la fonction *f* est paire !

Résultat final

Le développement limité à l'origine à l'ordre 3 de : $f : x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$ s'écrit :

$$f(x)=e^{-\frac{1}{3}}\times\left(1+\frac{x^2}{90}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)$$