Déterminer le développement limité à l'origine à l'ordre 3 de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1-x}}$$

Analyse

On utilise ici deux fois le développement limité en 0 de $(1+x)^{\alpha}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$. Le premier (celui de $x \mapsto \sqrt{1-x}$) est immédiat tandis que le second requiert de factoriser au préalable pour retrouver la forme générale $(1+X)^{\alpha}$.

Résolution

On note que l'on a d'abord facilement : $f(0) = \sqrt{1+\sqrt{1-0}} = \sqrt{2}$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x} &= (1-x)^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-1\right)\times\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-x)^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{1-x}} &= \sqrt{1+1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)} \\
&= \left(2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{32}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

En ne retenant alors que les termes de degré inférieur ou égal à 3, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{1-x}} &= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{32}x^3+\text{o}\left(x^3\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{32}x^3\right)-\frac{1}{8}\left(\left(-\frac{1}{4}x\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{4}x\right)\times\left(-\frac{1}{16}x^2\right)\right)\right. \\
&\qquad\left.+\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}x\right)^3\right]+\text{o}\left(x^3\right) \\
&= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{8}x-\frac{1}{32}x^2-\frac{1}{64}x^3-\frac{1}{128}x^2-\frac{1}{256}x^3-\frac{1}{1024}x^3\right)+\text{o}\left(x^3\right) \\
&= \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2-\frac{21}{1024}x^3\right)+\text{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité à l'origine à l'ordre 3 de :

$$f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1-x}}$$

s'écrit :

$$f\left(x\right) = \sqrt{2}\left(1-\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2-\frac{21}{1024}x^3\right)+\text{o}\left(x^3\right)$$