Déterminer le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \sin\left(x + x^2 + x^3 - x^4\right)$$

Analyse

On a ici affaire à une composée de deux fonctions, la première fonction étant une fonction polynôme qui s'annule pour $x = 0$. On commence donc par déterminer l'ordre auquel on doit développer la fonction sinus à l'origine.

Résolution

Le terme de plus bas degré de la fonction polynôme $x \mapsto x + x^2 + x^3 - x^4$ est « x » de degré 1. Le développement limité du sinus à l'origine ne comportant que des termes de degré impair, on va donc fournir un tel développement à l'ordre 3.

On part donc de :

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + x^2 + x^3 - x^4\right) &= \left(x + x^2 + x^3 - x^4\right) - \frac{1}{6}\left(x + x^2 + x^3 - x^4\right)^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= x + x^2 + x^3 - x^4 - \frac{1}{6}\left(x^3 + 3 \times x^2 \times x^2\right) + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= x + x^2 + x^3 - x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de :

$$f : x \mapsto \sin\left(x + x^2 + x^3 - x^4\right)$$

s'écrit :

$$f\left(x\right) = x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$