Déterminer le développement limité en 1 à l'ordre 3 de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Analyse

On va classiquement se ramener à un développement limité à l'origine en posant $x = 1+h$.

On peut cependant remarquer que $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est, au signe près, la dérivée de $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$.

Résolution

On a : $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\left(-\frac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}\right) = -g'(x)$ où $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

On pose donc : $x = 1+h$ et on va déterminer le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de la fonction $h \mapsto e^{\frac{1}{1+h}}$.

On développe d'abord $h \mapsto \frac{1}{1+h}$ à l'ordre 4 : $\frac{1}{1+h} = (1+h)^{-1} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + \mathrm{o}(h^4)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{1}{1+h}} &= \exp\left(1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + \mathrm{o}(h^4)\right) \\
&= e^1 \times \exp\left(-h + h^2 - h^3 + h^4 + \mathrm{o}(h^4)\right) \\
&= e \times \left[1 + \left(-h + h^2 - h^3 + h^4\right) + \frac{1}{2}\left(-h + h^2 - h^3 + h^4\right)^2 + \ldots\right. \\
&\qquad \left. \ldots + \frac{1}{6}\left(-h + h^2 - h^3 + h^4\right)^3 + \frac{1}{24}\left(-h + h^2 - h^3 + h^4\right)^4 + \mathrm{o}(h^4)\right] \\
&= e \times \left[1 + \left(-h + h^2 - h^3 + h^4\right) + \frac{1}{2}\left(h^2 + h^4 - 2h^3 + 2h^4\right) + \frac{1}{6}\left(-h^3 + 3h^4\right) + \frac{1}{24}\left(h^4\right) + \mathrm{o}(h^4)\right] \\
&= e \times \left[1 - h + \frac{3}{2}h^2 - \frac{13}{6}h^3 + \frac{73}{24}h^4 + \mathrm{o}(h^4)\right]
\end{aligned}$$

On a donc : $g(x)=e^{\frac{1}{x}}=e\times\left[1-(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2-\frac{13}{6}(x-1)^3+\frac{73}{24}(x-1)^4+\mathrm{o}\left((x-1)^4\right)\right]$.

En dérivant, on obtient alors :

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{1}{x}}=e\times\left[-1+3(x-1)-\frac{13}{2}(x-1)^2+\frac{73}{6}(x-1)^3+\mathrm{o}\left((x-1)^3\right)\right]$$

Finalement :

$$f(x)=-g'(x)=e\times\left[1-3(x-1)+\frac{13}{2}(x-1)^2-\frac{73}{6}(x-1)^3+\mathrm{o}\left((x-1)^3\right)\right]$$

Résultat final

Le développement limité en 1 à l'ordre 3 de :

$$f:x\mapsto\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

s'écrit :

$$f(x)=e\times\left[1-3(x-1)+\frac{13}{2}(x-1)^2-\frac{73}{6}(x-1)^3+\mathrm{o}\left((x-1)^3\right)\right]$$