Déterminer le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{1-x}$$

Analyse

On a ici affaire ici au produit des fonctions cosinus et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ toutes deux développables à un ordre quelconque à l'origine. Pour obtenir le DL de f à l'ordre 4, on commence donc par fournir ceux de ces deux fonctions à cet ordre.

Résolution

On a immédiatement :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1-x} &= \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right] \times \left[1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right] \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \frac{x^2}{2}\left(1 + x + x^2\right) + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 + x + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24}\right)x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de :

$$f : x \mapsto \frac{\cos x}{1-x}$$

s'écrit :

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{24}x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$