Déterminer le développement limité à l'origine à l'ordre 6 de la fonction *f* définie par :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

Analyse

Rappelons que l'on a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. On va donc pouvoir utiliser un DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'origine. En outre, la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est paire (sur $\mathbb{R}^*$ ou, en la prolongeant par continuité en 0 grâce à la limite précédente, sur $\mathbb{R}$). Il en va donc de même pour la fonction *f*.

Résolution

Pour obtenir un DL à l'origine à l'ordre 6 de $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$, il convient de donner un DL à l'ordre 7 de la fonction sinus en ce point :

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5\,040}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)$$

D'où : $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5\,040}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)$.

Comme le plus petit degré non nul apparaissant dans ce DL est 2, nous devons fournir le DL de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'origine l'ordre 3 (les ordres supérieurs fournissant des termes de degrés au moins égaux à 8 …) :

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \ln\left(1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5\,040}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)\\
&=\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5\,040}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5\,040}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)^2\\
&\qquad+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5\,040}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\right)^3+\mathrm{o}\left(x^6\right)\\
&=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{5\,040}x^6-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{36}x^4-\frac{1}{360}x^6\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{216}x^6\right)+\mathrm{o}\left(x^6\right)\\
&=-\frac{1}{6}x^2+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{72}\right)x^4+\left(-\frac{1}{5\,040}+\frac{1}{720}-\frac{1}{648}\right)x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)\\
&=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2\,835}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Résultat final

Le développement limité à l'origine à l'ordre 4 de :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

s'écrit :

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2\,835}x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)$$