Formulaire Mathoo

→ *Trigonométrie circulaire*

Ensembles de définition

Fonction	Ensemble de définition
sin	$\mathbb{R}$
cos	$\mathbb{R}$
$\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$	$\mathbb{R} - \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$	$\mathbb{R} - \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

Valeurs prises pour des angles simples

Angle (radians)	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Angle (degrés)	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**180**	**270**
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0	ND
cotan	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	ND	0

Dans le tableau ci-dessus, « ND » signifie « Non Définie ».

Périodicité

Le **sinus** et le **cosinus** sont 2π - périodiques
La **tangente** et la **cotangente** sont π - périodiques

Relations entre les fonctions trigonométriques

Relation fondamentale

$$\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}$$

Relations entre le sinus et le cosinus

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)$$

Relations entre la tangente et la cotangente

La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R}-\left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\boxed{\tan(x)\operatorname{cotan}(x)=1}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R}-\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{cotan}(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{cotan}(x)$$

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan(x)$$

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\tan(x)$$

Relation entre le cosinus et la tangente

La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\boxed{\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}}$$

Relation entre le sinus et la cotangente

La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$:

$$\boxed{\sin^2(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{cotan}^2(x)}}$$

Symétries

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{gathered} \sin(-x) = -\sin(x) \\ \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \sin(\pi + x) = -\sin(x) \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \cos(-x) = \cos(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x) \end{gathered}}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\boxed{\begin{gathered} \tan(-x) = -\tan(x) \\ \tan(\pi - x) = -\tan(x) \\ \tan(\pi + x) = \tan(x) \end{gathered}}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotan}(-x) &= -\operatorname{cotan}(x) \\ \operatorname{cotan}(\pi - x) &= -\operatorname{cotan}(x) \\ \operatorname{cotan}(\pi + x) &= \operatorname{cotan}(x) \end{aligned}$$

Argument somme ou différence de deux angles

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)^2$ et tels que :

1. $x + y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

2. $x - y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\right)^2$ et tels que :

1. $x + y \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\operatorname{cotan}(x+y) = \frac{\operatorname{cotan}(x)\operatorname{cotan}(y) - 1}{\operatorname{cotan}(x) + \operatorname{cotan}(y)}$$

2. $x-y\in\mathbb{R}-\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$

$$\boxed{\operatorname{cotan}(x-y)=-\frac{\operatorname{cotan}(x)\operatorname{cotan}(y)+1}{\operatorname{cotan}(x)-\operatorname{cotan}(y)}}$$

Cas particulier : angle double :

1. Les relations suivantes sont valables $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{gathered}\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)\\ \cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)\end{gathered}}$$

2. La relation suivante est valable $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$\boxed{\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}$$

3. La relation suivante est valable $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$:

$$\boxed{\operatorname{cotan}(2x)=\frac{\operatorname{cotan}^2(x)-1}{2\operatorname{cotan}(x)}}$$

Formule de MOIVRE et généralisation

$$\boxed{\cos(nx)+i\sin(nx)=\left(\cos(x)+i\sin(x)\right)^n}$$

De la formule de MOIVRE on tire, pour tout entier *n* non nul donné :

1. Les relations suivantes sont valables $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(nx)=\cos^n(x)-C_n^2\cos^{n-2}(x)\sin^2(x)+C_n^4\cos^{n-4}(x)\sin^4(x)-\ldots\\ \sin(nx)=C_n^1\cos^{n-1}(x)\sin(x)-C_n^3\cos^{n-3}(x)\sin^3(x)+\ldots\end{gathered}}$$

2. La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$:

$$\boxed{\tan(nx) = \frac{C_n^1 \tan(x) - C_n^3 \tan^3(x) + \dots}{1 - C_n^2 \tan^2(x) + C_n^4 \tan^4(x) - \dots}}$$

3. La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ k\frac{\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)$:

$$\boxed{\operatorname{cotan}(nx) = \frac{1 - C_n^2 \operatorname{cotan}^2(x) + C_n^4 \operatorname{cotan}^4(x) - \dots}{C_n^1 \operatorname{cotan}(x) - C_n^3 \operatorname{cotan}^3(x) + \dots}}$$

Transformation des sommes

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\sin(x) - \sin(y) &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\
\cos(x) + \cos(y) &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\
\sin(x) + \cos(y) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right) \\
\sin(x) - \cos(y) &= -2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \right)^2$:

$$\boxed{\begin{aligned}
\tan(x) + \tan(y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)} \\
\tan(x) - \tan(y) &= \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}
\end{aligned}}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\right)^2$:

$$\cot(x) + \cot(y) = \frac{\sin(x+y)}{\sin(x)\sin(y)}$$

$$\cot(x) - \cot(y) = -\frac{\sin(x-y)}{\sin(x)\sin(y)}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x,y) \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \times \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\tan(x) + \cot(y) = \frac{\cos(x-y)}{\cos(x)\sin(y)}$$

$$\tan(x) - \cot(y) = -\frac{\cos(x+y)}{\cos(x)\sin(y)}$$

Transformation des produits

Les relations suivantes sont valables $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right)$$

La relation suivante est valable $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)^2$:

$$\tan(x)\tan(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$$

La relation suivante est valable $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\right)^2$:

$$\cot(x)\cot(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)}$$

Expressions en fonction de l'angle moitié

Avec la simplification d'écriture : $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a :

Les relations suivantes sont valables $\forall x\in\mathbb{R}-\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$:

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2}\end{gathered}}$$

La relation suivante est valable $\forall x\in\mathbb{R}-\left(\{\pi+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$:

$$\boxed{\tan(x)=\frac{2t}{1-t^2}}$$

La relation suivante est valable $\forall x\in\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$:

$$\boxed{\operatorname{cotan}(x)=\frac{1-t^2}{2t}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)}$$

Sommes de cosinus et de sinus dont les arguments suivent une progression arithmétique

Pour tout α différent de $2k\pi$, tout x réel et tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{\begin{gathered}\cos x+\cos(x+\alpha)+\cos(x+2\alpha)+\ldots+\cos(x+(n-1)\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)\\ \sin x+\sin(x+\alpha)+\sin(x+2\alpha)+\ldots+\sin(x+(n-1)\alpha)=\frac{\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\sin\left(x+\frac{(n-1)\alpha}{2}\right)\end{gathered}}$$