PSI*

DS de MathsInfo du 12-10-2015

Durée : 1 heure

On rappelle que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

> L'objectif principal de cet exercice est d'écrire un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\cos(x)$ pour certaines valeurs de x à l'aide du développement précédent.

Pour tout x réel, on pose : $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et $R_n(x) = \cos(x) - S_n(x)$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\mathrm{I} = \left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$ la série $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. En déduire : $\left|\cos x - S_n(x)\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

2. Ecrire une fonction Python `RangMini` qui calcule le plus petit entier naturel n tel que $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \varepsilon$ où ε est un réel strictement positif fixé.
   - La fonction `RangMini` recevra comme argument une variable `x`, correspondant au réel x, et une variable `epsilon` correspondant au réel ε.
   - Les factorielles seront obtenues via une fonction Python `Fact` (à écrire).

Le principe du calcul de l'approximation de $\cos(x)$ pour tout réel x de l'intervalle I est alors :

- On fixe/demande la précision souhaitée (réel ε).
- On détermine le plus petit entier n tel que $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \varepsilon$.
- On calcule $S_{n-1}(x)$ qui est une valeur approchée de $\cos(x)$ à ε près.

3. Ecrire une fonction Python `EvalSommePartielle` qui recevra comme argument une variable `x`, correspondant au réel x, et une variable `n`, correspondant à un entier n et évaluera $S_n(x)$ (vous écrirez et utiliserez une fonction <u>récursive</u> `PolyHorner` mettant en œuvre la méthode de Horner pour l'évaluation des polynômes).

4. Ecrire enfin une fonction Python `CosApprox` qui recevra comme argument une variable `x` correspondant au réel x de l'intervalle I et une variable `epsilon`, correspondant au réel ε, et qui renverra une valeur approchée de $\cos(x)$ à ε près.

5. Dans cette question on étend l'intervalle de validité de la méthode ci-dessus à $\mathrm{J} = [-\pi\,;\pi]$.

   a. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \leq \frac{x^2}{12}$.

   b. En déduire que pour tout x de J, la majoration $\left|\cos x - S_n(x)\right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ est valable pour tout entier naturel n non nul.