TD – RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Introduction et objectifs

Ce TD d'analyse numérique est consacré aux codages simples de quelques méthodes classiques de résolution des équations différentielles ordinaires du premier ordre : les schémas d'Euler et les schémas de Runge-Kutta à l'ordre 2 et à l'ordre 4. Les éléments géométriques sous-jacents doivent être bien compris et les représentations graphiques permettre d'appréhender qualitativement la précision de tel ou tel schéma.

Le schéma d'Euler

Exercice N°1 – Codage du schéma d'Euler explicite

Coder le schéma d'Euler explicite. Conformément au cours, on utilisera une fonction `f` qui recevra en argument `y` et `x` (ou `x` et `y`, si vous préférez cette ordre-là !) et renverra l'expression de la dérivée de `y` par rapport à `x` en fonction de `y` et `x`.

Vous testerez votre code avec les équations différentielles et conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \sqrt{xy} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Vous chercherez des valeurs approchées de $y(1)$ pour la première équation différentielle, de $y(4)$ pour la seconde et et de $y(9)$ pour la troisième (remarque : les valeurs exactes sont respectivement $y(1) = e$, $y(4) = 2e^4 - 5$ et $y(9) = \dfrac{841}{9} = 94 - \dfrac{5}{9}$).

La fonction principale de votre code recevra donc en argument : x_0, y_0 (conditions initiales), b (abscisse du point où on cherche à évaluer la valeur prise par la fonction), F (nom de la fonction codant l'équation différentielle) et n, le nombre de pas (i.e. le nombre d'intervalles de la subdivision de l'intervalle $[x_0, b]$.

Vous pourrez représenter sur un même graphique :

- La courbe représentative de la solution exacte de l'équation (si vous la connaissez !).
- Les nuages des points $(x_i\ ;\ y_i)$ correspondant à différents nombre de pas (10, 100, 400).

Exercice N°2 – Stabilité et schéma d'Euler implicite

On s'intéresse aux problèmes :

$$\begin{cases} y' = -a\,y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{avec } a > 0$$

Vous chercherez, à l'aide du schéma d'Euler explicite, des valeurs approchées de $y(1)$ pour différentes valeurs de *a* : 5, 50, 500 ou 5000 et différents nombres de pas (typiquement 10, 100, …). Qu'observe-t-on ?

Coder alors le schéma d'Euler implicite (on rappelle que y_{i+1} est solution de l'équation : $y_{i+1} = y_i + h \times f\left(y_{i+1},\, x_{i+1}\right)$) et procéder aux mêmes tests. Que peut-on en conclure ?

La méthode de Heun

Exercice N°3 – Codage du schéma de Heun

Coder le schéma de Heun et le tester avec les problèmes de l'exercice 1.

Pour rappel : $y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2} \times \left[f\left(y_i,\, x_i\right) + f\left(y_i + h \times f\left(y_i,\, x_i\right),\, x_i + h\right) \right]$.

La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 2

Exercice N°4 – Codage du schéma de Runge-Kutta à l'ordre 2

Coder le schéma de Runge-Kutta à l'ordre 2 et le tester avec les problèmes de l'exercice 1.

Pour rappel : $y_{i+1} = y_i + h \times f\left(y_i + \dfrac{h}{2} \times f\left(y_i,\, x_i\right),\, x_i + \dfrac{h}{2} \right)$.

La méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4

Exercice N°5 – Codage du schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4

Coder le schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4 et le tester avec les problèmes de l'exercice 1.

Pour rappel :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \times \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = f\left(y_i, x_i\right)$$

$$k_2 = f\left(y_i + \frac{h}{2} \times k_1, x_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(y_i + \frac{h}{2} \times k_2, x_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f\left(y_i + h \times k_3, x_i + h\right)$$

Comparaison des méthodes

Exercice N°6

Pour divers nombre de pas (10, 100, 400) comparer les quatre schémas numériques (Euler explicite, Heun, Runge-Kutta à l'ordre 2 et Runge-Kutta à l'ordre 4) en reprenant le problème :

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Pour un nombre de pas donné, vous pourrez représenter sur un même graphique :

- La courbe représentative de la solution exacte de l'équation.
- Les nuages des points $\left(x_i \,;\, y_i\right)$ correspondants aux trois schémas testés.

Schéma d'Euler en dimension 2

On considère le système différentiel (équations de Lotka-Volterra, 1925) :

$$\begin{cases} x'(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}\right)(t) = x(t)\left(\alpha - \beta y(t)\right) \\ y'(t) = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)(t) = -y(t)\left(\gamma - \delta x(t)\right) \end{cases}$$

Un tel système, encore appelé « modèle proies-prédateurs », permet de décrire les évolutions des populations de deux espèces, les proies et les prédateurs, selon diverses dynamiques (paramètres α, β, γ et δ, voir ci-dessous). Dans ce modèle, $x(t)$ et $y(t)$ désignent respectivement le nombre de proies et celui de prédateurs à l'instant *t*. Dans les équations, le produit $x(t)y(t)$ modélise le nombre de rencontres à l'instant *t* :

- α : taux de reproduction des proies (indépendamment des prédateurs).
- β : taux de mortalité des proies (du fait des prédateurs).
- γ taux de mortalité des prédateurs (indépendamment des proies).
- δ taux de reproduction des prédateurs (du fait de la consommation de proies).

Le schéma numérique associé s'écrit :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \times x_i\left(\alpha - \beta y_i\right) \\ y_{i+1} = y_i - h \times y_i\left(\gamma - \delta x_i\right) \end{cases}$$

Exercice N°7

Coder le schéma et le tester avec $\alpha = 0{,}1$ $\beta = 0{,}2$ $\gamma = 0{,}1$ et $\delta = 0{,}3$.
On testera diverses conditions initiales (par exemple $(x_0\,;\,y_0) = (1\,;\,1)$ ou $(x_0\,;\,y_0) = (1\,;\,2)$) et on représentera graphiquement *y* en fonction de *x* en choisissant un pas de 0,1 (par exemple) et en calculant 1000 couples de valeurs (typiquement). Ces paramètres initiaux pourront être demandés à l'utilisateur.

Pour aller plus loin

Exercice N°8 – Poursuites (âmes sensibles s'abstenir…)

Un lion poursuit une gazelle (c'est dans l'ordre des choses…). Ces deux animaux (enfin… leurs positions…) sont représentés dans le plan par, respectivement, les points L et G. On suppose :

- Que la vitesse v du lion est constante : $v = \|\vec{v}\|$.
- Qu'à tout moment, le vecteur vitesse du lion est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{LG}}$.

On note respectivement $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ les positions du lion et de la gazelle à l'instant t dans un repère orthonormé du plan.

D'après les hypothèses formulées ci-dessus, on a donc :

$$\vec{v} = v \times \frac{1}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{LG}}\right\|} \overrightarrow{\mathrm{LG}}$$

Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{v}{\sqrt{\left(X(t)-x(t)\right)^2 + \left(Y(t)-y(t)\right)^2}} \times \left(X(t)-x(t)\right) \\ y'(t) = \dfrac{v}{\sqrt{\left(X(t)-x(t)\right)^2 + \left(Y(t)-y(t)\right)^2}} \times \left(Y(t)-y(t)\right) \end{cases}$$

En procédant comme dans l'exercice précédent, déterminer la trajectoire du lion dans les trois cas suivants :

- La trajectoire de la gazelle est rectiligne et incluse dans l'axe des abscisses.
- La trajectoire de la gazelle est circulaire (no comment… ☺).
- La trajectoire de la gazelle est « brownienne ». Dans ce dernier cas, la gazelle changera de direction périodiquement (tous les 5 ou 10 pas de temps). La direction courante sera définie par un angle $\theta \in [-\pi \,;\, \pi[$ obtenu à l'aide de la fonction `random` du module `random`.

Dans chacun des trois cas, on paramètrera la trajectoire de la gazelle en considérant sa vitesse constante.
On pourra prendre typiquement pour les vitesses du lion et de la gazelle environ 20 m/s et tester différents scénarios (lion plus rapide que la gazelle ou l'inverse ou vitesses égales).
L'unité choisie pour les distances sera le mètre et on interrompra le programme dès lors que la distance entre le lion et la gazelle sera inférieure à 1 mètre ou que plus de 1000 itérations auront été effectuées.

Exercice N°9 – Avec la dérivée seconde

On suppose cette fois que c'est la dérivée seconde y'' que l'on exprime en fonction de x, y et y' via une équation différentielle linéaire du second ordre : $y'' = F(x, y, y')$.

On aura cette fois trois conditions initiales : x_0, $y_0 = y(x_0)$ et $y'_0 = y'(x_0)$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h \times y'_i \\ y'_{i+1} = y'_i + h \times F(x_i, y_i, y'_i) \end{cases}$$

<u>Le cas du pendule pesant.</u>

On considère un pendule homogène de longueur L dans un champ de pesanteur supposé uniforme et dont on note g l'intensité (typiquement $g = 9{,}81\,\text{ms}^{-2}$).
Si on note θ l'angle orienté que fait le pendule avec la verticale, θ satisfait une équation différentielle de la forme :

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) + k\theta'(t) = 0$$

où k est le coefficient d'amortissement.

On demande de tracer le diagramme de phase de ce pendule, c'est-à-dire l'ensemble des points $(\theta(t), \theta'(t))$ pour différente valeur de k (on commencera avec $k = \frac{1}{5}$). On effectuera les calculs tant qu'une condition de la forme $|\theta(t)| < \varepsilon$ ne sera pas satisfaite.

Exercice N°10 – Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (schéma d'EULER explicite)

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = (x^2 + x + 1)e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Sa résolution donne la solution exacte :

$$\Psi : x \mapsto \frac{1}{54}\left[-2e^x + (6x^3 + 3x^2 + 16x + 2)e^{2x}\right]$$

Et on a : $\Psi(2) = \dfrac{e^2}{27}\left(47e^2 - 1\right) \simeq 94,77$

On cherche une valeur approchée de $\Psi(2)$.

Résoudre le problème à l'aide d'un schéma d'Euler explicite d'ordre 2 (cf. l'exercice précédent).

On pourra comparer graphiquement la solution approchée fourni par le schéma avec la solution exacte.

Exercice N°11 – Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (schéma de RUNGE-KUTTA d'ordre 4)

On considère maintenant la méthode de RUNGE-KUTTA d'ordre 4 appliquée à une équation différentielle d'ordre 2. On a cette fois :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= F\left(x_i, y_i, y'_i\right)\\
k_2 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\times y'_i, y'_i + \frac{h}{2}\times k_1\right)\\
k_3 &= F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}\times y'_i + \frac{h^2}{4}\times k_1, y'_i + \frac{h}{2}\times k_2\right)\\
k_4 &= F\left(x_i + h, y_i + h\times y'_i + \frac{h^2}{2}\times k_2, y'_i + h\times k_3\right)
\end{aligned}
$$

Et :

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + h\times y'_i + \frac{h^2}{6}\left(k_1 + k_2 + k_3\right)\\
y'_{i+1} &= y'_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)
\end{aligned}
$$

Reprendre le problème de l'exercice précédent en utilisant cette fois cette méthode.

On pourra comparer graphiquement la solution approchée fourni par le schéma avec la solution exacte.