

# Informatique

## Préparation à l'oral.

---

Analyse et probabilités - Corrigés

# 2016

### 1. Centrale PSI ♠♠

---

(Planche RMS 2016-2017 N°1045)

1. i) Pour tout  $n$  entier naturel non nul, on s'intéresse à  $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$  est bien définie sur l'intervalle  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ .

On peut écrire :  $\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} = x \mapsto n^2 \times \frac{\sin^2(nx)}{(nx)^2} \times \frac{x^2}{\sin^2(x)} = n^2 \times \left(\frac{\sin(nx)}{nx}\right)^2 \times \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{nx} = 1$ , il vient immédiatement :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} = n^2$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$  admettant une limite finie en 0 à droite, on en déduit

immédiatement que  $I_n$  existe.

ii) On utilise la méthode des trapèzes dont on rappelle la formule générale :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &\approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(N-1)h) + f(b)] \\ &= h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(N-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \end{aligned}$$

avec  $h = \frac{b-a}{N}$ .

On considère ici :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} & \text{si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ n^2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On peut donc considérer le code suivant (on n'aura pas oublié d'importer `pi` et `sin` du module `math`, par exemple) :

```
def FoncIn(n):
    N = 10000
    I = 0
    h = pi/(2*N)
    if n//2 == 0:
        d = 0
    else:
        d = 1
    I = (n**2 + d)/2
    for i in range(1,N):
        I += sin(n*(i*h))**2/sin(i*h)**2
    I *= h
    return(I)
```

En testant ce code pour diverses valeurs de  $n$  (typiquement 10, 100, 1000, ...) ou en représentant graphiquement  $I_n$  en fonction de  $n$ , on peut conjecturer :

$$I_n = n \frac{\pi}{2}$$

2. i) On procède de façon similaire à ce qui a été fait à la question a) i).

La fonction  $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{nx^2}$  est bien définie sur l'intervalle  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

On peut écrire :  $\frac{\sin^2(nx)}{nx^2} = x \mapsto n \times \frac{\sin^2(nx)}{(nx)^2} = n \times \left(\frac{\sin(nx)}{nx}\right)^2$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{nx} = 1$ , il vient immédiatement :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} = n$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{nx^2}$  admettant une limite finie en 0 à droite, on en déduit immédiatement que  $J_n$  existe.

ii) On considère cette fois :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} & \text{si } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right] \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On peut alors considérer le code :

```
def FoncJn(n):
    N = 100000
    J = 0
    h = pi/(2*N)
    if n/2 == 0:
        d = 0
    else:
        d = 4/(n*pi**2)
    J = (n + d)/2
    for i in range(1,N):
        J += sin(n*(i*h))**2/(n*(i*h)**2)
    J *= h
    return(J)
```

En testant ce code pour diverses valeurs de  $n$  (typiquement 10, 100, 1000, ...), on peut conjecturer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

Pour établir ce résultat, nous admettons que l'on a, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$I_n = n \frac{\pi}{2}. \text{ Il vient alors :}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi}{2} - J_n \right| &= \left| \frac{1}{n} I_n - J_n \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{n \sin^2(x)} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} dx \right| = \frac{1}{n} \left| \int_0^{\pi/2} \sin^2(nx) \times \left( \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) dx \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx) \times (x^2 - \sin^2(x))}{\sin^2(x) \times x^2} dx \right| \leq \frac{1}{n} \times \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin^2(nx) \times (x^2 - \sin^2(x))}{\sin^2(x) \times x^2} \right| dx \\ &\leq \frac{1}{n} \times \int_0^{\pi/2} \left| \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} \right| dx \end{aligned}$$

On a classiquement :  $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  et donc :  $\sin^2(x) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ .

Ainsi :  $x^2 - \sin^2(x) \underset{0}{=} \frac{x^4}{3} + o(x^4)$  et :

$$\frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} \underset{0}{=} \frac{x^2}{\sin^2(x)} \times \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = \frac{x^2}{\sin^2(x)} \times \left( \frac{1}{3} + o(1) \right)$$

Enfin :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} = \frac{1}{3}$ .

L'intégrale  $\int_0^{\pi/2} \left| \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} \right| dx$  existe donc et on déduit de l'inégalité

$\left| \frac{\pi}{2} - J_n \right| \leq \frac{1}{n} \times \int_0^{\pi/2} \left| \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} \right| dx$  que l'on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{\pi}{2} - J_n \right| = 0$ . On a bien :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}}$$

iv) Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1$ , il n'y a pas de problème en 0.

Par ailleurs,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$  converge car  $\forall x \in [1; +\infty[$ ,  $0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  est une intégrale de Riemann convergente.

Ainsi,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$  existe.

Dans  $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} dx$ , nous effectuons le changement de variable  $t = nx$ . Il vient :

$$J_n = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{n \left( \frac{t}{n} \right)^2} \frac{dt}{n} = \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$

On en déduit alors :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$ .

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}}$$

## 2. D’après Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1079)

A venir...

## 3. D’après Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1046)

- a) On considère la fonction sinus hyperbolique définie sur  $\mathbb{R}$ . Elle y est dérivable, et donc continue, de dérivée la fonction cosinus hyperbolique qui est strictement positive. La fonction sh est donc strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Comme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty, \text{ on}$$

déduit de ce qui précède que la fonction sh définit une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Finalement :

L’équation  $\operatorname{sh}(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On a :  $\operatorname{sh}(0) = 0 < 1$  et  $\operatorname{sh}(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \simeq 1,1752 > 1$ . On a donc  $\alpha \in ]0; 1[$ .

Pour obtenir un encadrement de  $\alpha$  d’amplitude inférieure ou égale à  $\varepsilon > 0$ , on peut donc utiliser l’algorithme de dichotomie avec, comme valeurs initiales des bornes de l’intervalle  $a = 0$  et  $b = 1$ . Rappelons qu’à chaque étape, l’amplitude  $A_n$  (on a donc ici

$A_0 = 1$ ) de l’intervalle est divisée par 2 :  $A_n = \frac{1}{2^n}$ . Soit  $N$  le nombre minimum d’étapes

requises pour avoir  $A_n \leq \varepsilon$ .

On a  $A_n \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow -n \ln 2 \leq \ln \varepsilon \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$ . D’où  $N = \mathbb{E}\left(-\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}\right) + 1$ .

On peut donc proposer la fonction Python EncadreAlpha suivante qui reçoit en argument  $\varepsilon$  (epsilon) et renvoie un tuple formé des bornes, inférieure et supérieure, de l’intervalle encadrant  $\alpha$  et de leur différence (i.e. l’amplitude de l’intervalle) :

```
def EncadreAlpha(epsilon):
    a, b = 0., 1.
    if epsilon <= 0:
        return("Précision négative !")
    elif epsilon < 1:
        N = int(-log(epsilon)/log(2)) + 1
        for i in range(N):
            m = (a + b) / 2
            if (sinh(a) - 1) * (sinh(m) - 1) < 0:
                b = m
            else:
                a = m
        return(a,b,b - a)
```

Avec  $\varepsilon = 10^{-5}$ , on obtient :

$$0,881\,370 < \alpha < 0,881\,379$$

Note : on a arrondi les valeurs des bornes à  $10^{-6}$ , par défaut pour la borne inférieure et par excès pour la borne supérieure.

- b) On commence par écrire une fonction Python implémentant la méthode des trapèzes pour la fonction  $t \mapsto \text{sh}(t)^n$  sur l'intervalle  $[a; b]$  ( $a < b$ ) :

```
def IntTrap(a,b,N,n):
    from numpy import linspace
    I = 0
    h = (b-a)/N
    X = linspace(a,b,N+1)
    I = (sinh(a)**n + sinh(b)**n)/2
    for i in range(1,N):
        I += sinh(X[i])**n
    I *= h
    return(I)
```

On a alors la fonction suite demandée :

```
def suite(n):
    for i in range(1,n+1):
        I = IntTrap(0,alpha,10000,i)
        print(I,i*I)
```

- c) Soit  $n$  un entier naturel supérieure ou égal à 2.  
On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\alpha \text{sh}(t)^n dt \\ &= \int_0^\alpha \text{sh}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt \\ &= \int_0^\alpha (\text{ch}(t)^2 - 1) \text{sh}(t)^{n-2} dt \\ &= \int_0^\alpha \text{ch}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt - \int_0^\alpha \text{sh}(t)^{n-2} dt \\ &= \int_0^\alpha \text{ch}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt - I_{n-2} \end{aligned}$$

Pour évaluer  $\int_0^\alpha \text{ch}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt = \int_0^\alpha \text{ch}(t) \text{ch}(t) \text{sh}(t)^{n-2} dt$ , on procède à une intégration par parties :

$$u(t) = \text{ch}(t) \Rightarrow u'(t) = \text{sh}(t)$$

$$v'(t) = \text{ch}(t) \text{sh}(t)^{n-2} \Leftarrow \frac{1}{n-1} \text{sh}(t)^{n-1}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \text{ch}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt &= \left[ \frac{1}{n-1} \text{ch}(t) \text{sh}(t)^{n-1} \right]_0^\alpha - \frac{1}{n-1} \int_0^\alpha \text{sh}(t)^n dt \\ &= \frac{1}{n-1} \text{ch}(\alpha) \underbrace{\text{sh}(\alpha)^{n-1}}_{=1} - \frac{1}{n-1} \text{ch}(0) \text{sh}(0)^{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n \\ &= \frac{1}{n-1} \text{ch}(\alpha) - \frac{1}{n-1} I_n \end{aligned}$$

Or  $\text{sh}(\alpha) = 1 \Rightarrow \text{ch}(\alpha)^2 = 1 + \text{sh}(\alpha)^2 = 1 + 1 = 2$  et comme  $\text{ch}(\alpha) > 0$ , on a :  $\text{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$ .

Il vient alors :  $I_n = \frac{1}{n-1} \sqrt{2} - \frac{1}{n-1} I_n - I_{n-2}$ , soit :  $(n-1)I_n = \sqrt{2} - I_n - (n-1)I_{n-2}$  et,

finalement :

$$nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$$

d) Sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ , on a  $\text{sh}(t) \in [0; 1]$  et donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{sh}(t)^{n+1} \leq \text{sh}(t)^n$  et donc, en considérant les intégrales :  $I_{n+1} \leq I_n$ . La suite  $(I_n)$  est donc décroissante. Comme on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n \geq 0$  (intégrale d'une fonction positive sur  $[0; \alpha]$ ), on en tire finalement que la suite  $(I_n)$  converge. Notons  $L$  sa limite.

D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :

$$nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}. \text{ D'où : } I_n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{n}. \text{ En passant à la limite dans chaque}$$

membre, il vient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ I_n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_{n-2} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n}$ , c'est-à-dire  $2L = 0$ . D'où,

finalement :  $L = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

e) On a (cf. question c)  $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$ . Soit  $nI_n + (n-2)I_{n-2} + I_{n-2} = \sqrt{2}$ .

La suite  $(nI_n)$  est donc bornée et va converger vers  $L'$  vérifiant  $L' + L' + 0 = \sqrt{2}$ , soit

$$L' = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ On en déduit } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{2} n I_n \right) = 1 \text{ et donc : } I_n \sim \frac{1}{\sqrt{2} n}.$$

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2} n}$$

- f) Comme on a  $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$ , la série de terme général  $(-1)^n I_n$  est une série alternée. On a vu par ailleurs que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$  et que la suite  $(I_n)$  était décroissante. On en déduit, d'après le critère spécial des séries alternées que la série  $\sum (-1)^n I_n$  est convergente.

Si on pose  $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} (-1)^n I_n$  (reste d'ordre  $n$ ), on sait que l'on a :  $|R_n| \leq |(-1)^{n+1} I_{n+1}| = I_{n+1}$ .

Pour obtenir une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la somme de la série  $\sum (-1)^n I_n$ , il suffit donc de sommer les  $(-1)^n I_n$  jusqu'à ce que  $I_n$  soit inférieure à  $10^{-2}$ .

On peut donc considérer le script suivant :

```
alpha = 0.881375
I = 2**0.5 - 1 # on initialise I à I_1
S = alpha # On initialise S à I_0
i = 1
while I >= 0.01:
S += I*(-1)**i
i += 1
I = IntTrap(0, alpha, 10000, i)
print(S)
```

- g) A la question e), on a vu que l'on avait  $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2} n}$ . Ainsi, la série  $\sum I_n$  est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann divergente. Elle est donc divergente.

$$\sum I_n \text{ diverge.}$$

#### 4. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1034)

1. On va étudier le comportement de la fonction  $x \mapsto \frac{x}{\ln(1-x)}$  au voisinage de chacune des bornes en notant qu'elle n'est définie en aucune d'elles.

On a l'équivalence classique :  $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ .

On en déduit immédiatement :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\ln(1-x)} = -1$ .

Par ailleurs, on a :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(1-x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$  d'où :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{\ln(1-x)} = 0^-$ .

La fonction  $x \mapsto \frac{x}{\ln(1-x)}$  admettant une limite finie en chacune des bornes de l'intégrale, on en déduit que celle-ci converge.

$$A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)} dx \text{ converge.}$$

2. D'après la question précédente, on peut travailler avec la fonction  $f$  définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1-x)} & \text{si } x \in ]0; 1[ \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On utilise la méthode des trapèzes dont on rappelle la formule générale :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &\approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(N-1)h) + f(b)] \\ &= h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(N-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \end{aligned}$$

avec  $h = \frac{b-a}{N}$ .

Ici,  $a=0$  et  $b=1$  :  $\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$ .

On peut donc considérer le code suivant :

```
from math import log

def IntTrap(N):
    I = 0
    h = 1/N
    I = -0.5
    for i in range(1, N):
        x = i*h
        I += x/log(1-x)
    I *= h
    return(I)
```

Dans ce code, la variable  $N$  désigne le nombre d'intervalle dans la subdivision de l'intervalle  $[0; 1]$ .

Par exemple, l'appel `IntTrap(10000)`, renvoie la valeur :  $-0.6931426382764816$ .

3. Comme on veut 0 et  $+\infty$  comme bornes, on pose le changement de variable :  
 «  $t = -\ln(1-x)$  », c'est à dire  $x = 1 - e^{-t}$ . Il vient alors :  $dx = e^{-t} dt$ .

$$\text{D'où : } A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{-t} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$$

On a bien :

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$$

4. On a :  $\forall x > 0, F(x) = \int_0^x \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$ . Posons alors, pour tout  $x$  strictement positif :

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt.$$

La fonction  $F$  est une primitive sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t}$ .

$$\text{On a donc : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}.$$

Par ailleurs, on a :  $e^{-t} - 1 = 1 - t - 1 + o(t) = -t + o(t)$ , d'où  $\frac{e^{-t} - 1}{t} = -1 + o(1)$ , soit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - 1}{t} = -1.$$

Ainsi, pour tout réel  $x$  strictement positif, l'intégrale  $\int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$  est convergente. Il s'agit d'une primitive sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la fonction  $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ . Notons-la  $H$ .

$$\text{On a donc : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_0^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = H(2x) - H(x) \text{ et}$$

$$\text{donc : } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, G'(x) = 2 \times H'(2x) - H'(x) = 2 \times \frac{e^{-2x} - 1}{2x} - \frac{e^{-x} - 1}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}.$$

On a donc  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = G'(x)$  et on en déduit immédiatement que les fonctions  $F$  et  $G$  ne diffèrent que d'une constante.

Comme  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_0^x \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x)$ , cette constante est

$$\text{nulle et on en déduit : } \forall x > 0, F(x) = \int_0^x \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt = G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$$

A partir de ce qui précède, on a :  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ .

Dans l'intégrale  $\int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$  les deux bornes vont tendre vers l'infini quand  $x$  tendra vers

l'infini. Le terme  $e^{-t}$  est négligeable devant 1 au voisinage de l'infini. On étudie alors

légitimement :  $\left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{-1}{t} dt \right|$ .

On a :

$$\left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{-1}{t} dt \right| = \left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \right| = \int_x^{2x} \frac{1}{t e^t} dt \leq (2x - x) \times \frac{1}{x e^x} = \frac{1}{e^x}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ , il vient :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{-1}{t} dt \right) = 0$ .

Or :  $\int_x^{2x} \frac{-1}{t} dt = \left[ -\ln(t) \right]_x^{2x} = -\ln(2x) + \ln(x) = -\ln(2)$ .

On a donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt + \ln(2) \right) = 0$ , c'est-à-dire :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = -\ln(2)$ .

Finalement :

$A = -\ln(2)$
---------------

La valeur approchée obtenue à la question 2 est bien conforme à la valeur exacte que nous venons de calculer.

## 5. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1079)

A venir...

## 6. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1080)

A venir...

## 7. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1083)

A venir...

# 2015

## 1. Exercice type N° 1

1. On considère une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  où  $X_n$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p_n$ . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Dans la pratique, pour une variable aléatoire  $X$  suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , ce théorème permet d'approcher la probabilité  $P(X = k)$  par  $\frac{(np)^k}{k!} e^{-(np)}$ .

Classiquement, on considère qu'une telle approximation est valable lorsque  $n$  est suffisamment grand ( $n \geq 30$ ),  $p$  suffisamment petit ( $p \leq 0,1$ )

2. Voir le code proposé sur votre page.

## 2. Exercice type N° 2

1. Voir le code proposé sur votre page.

On a obtenu (en allant au-delà de la suggestion de l'énoncé !) :

$N$	$S_{u,N}$ (valeur approchée à $10^{-15}$ )
1 000	1.070 694 154 319 582
10 000	1.070 868 194 833 175
100 000	1.070 805 652 123 411
1 000 000	1.070 795 294 441 921

La suite  $(S_{u,N})_{N \in \mathbb{N}}$  semble converger, c'est-à-dire : la série  $\sum u_n$  semble être convergente.

2. Il semble assez « naturel » de partir de la seconde somme du membre de droite de l'égalité :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right] &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \times \sin 1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \times (\sin 1 + \sin 2) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \times (\sin 1 + \sin 2 + \sin 3) \\
 &+ \dots \\
 &+ \left( \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} \right) \times (\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin(N-2)) \\
 &+ \left( \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) \times (\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin(N-1)) \\
 &= \left( \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}}_{=0} \right) \times \sin 1 \\
 &+ \left( \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}}_{=0} \right) \times \sin 2 \\
 &+ \dots \\
 &+ \left( \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) \times \sin(N-1) \\
 &= \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{N} \right) \times \sin k \\
 &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \sin k
 \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right] &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \sin k \\
 &= \frac{\sin N}{N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{\sin k}{k} \\
 &= S_{u,N}
 \end{aligned}$$

Le résultat est établi.

D'après ce qui précède, on a :  $S_{u,N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right]$ .

Etudions d'abord :  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k$ .

On peut considérer  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + i \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos k$ .

On a :  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + i \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{ik} = \frac{1}{N} e^i \sum_{k=1}^N e^{i(k-1)} = \frac{1}{N} e^i \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik} = \frac{1}{N} e^i \frac{1-e^{iN}}{1-e^i}$ .

Comme  $e^i \frac{1-e^{iN}}{1-e^i}$  est borné (pour tout  $N$  entier naturel  $|e^{iN}|=1$  et  $\left| e^i \frac{1-e^{iN}}{1-e^i} \right| \leq |1-e^{iN}| \leq 2$ ),

on a immédiatement :  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} e^i \frac{1-e^{iN}}{1-e^i} = 0$  et donc :  $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos k = 0$ .

On s'intéresse maintenant à la série de terme général  $\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k$ .

D'après le calcul qui précède,  $\sum_{k=1}^n \sin k = \text{Im} \left( e^i \frac{1-e^{in}}{1-e^i} \right)$  est bornée puisque  $e^i \frac{1-e^{in}}{1-e^i}$  l'est.

Ainsi, il existe un réel  $M$  positif tel que :

$$\left| \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right| = \frac{1}{n(n+1)} \left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq \frac{M}{n(n+1)} \leq \frac{M}{n^2}$$

Comme la série de terme général  $\frac{M}{n^2}$  est convergente (série de Riemann convergente), on

en conclut que la série de terme général  $\left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k$  est absolument convergente et donc convergente.

On déduit de ce qui précède que la suite  $(S_{u,N})_{N \in \mathbb{N}}$  converge, c'est-à-dire que la série  $\sum u_n$  converge.

3. Voir le code proposé sur votre page.

En appelant alors la fonction Somme2 en donnant à l'argument N la valeur 100 000, on obtient :

$\alpha$	$S_{v,N}$
$\frac{1}{4}$	5 958.423 812 033 241
$\frac{1}{2}$	317.227 766 017 456 53
1	0.999 999 999 998 418
2	$9.999 900 001 022 437 \times 10^{-6}$

Puis avec 1 000 000 :

$\alpha$	$S_{v,N}$
----------	-----------

$\frac{1}{4}$	32 655.399 378 860 075
$\frac{1}{2}$	1 000.999 999 990 886 7
1	1.000 000 000 005 225 6
2	9.999 990 000 086 706 $\times 10^{-7}$

Il semble que la série  $\sum v_n$  soit divergente pour  $\alpha = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = \frac{1}{4}$ . Il semble qu'elle soit convergente pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$ .

4. Calculer la valeur de la somme pour  $\alpha = 1$ .

Soit  $N$  un entier naturel non nul. On s'intéresse à  $S_{v,2N} = \sum_{n=2}^{2N} v_n = v_2 + v_3 + \dots + v_{2N-1} + v_{2N}$ .

On a :

$$\begin{aligned}
 S_{v,2N} &= v_2 + v_3 + \dots + v_{2N-1} + v_{2N} \\
 &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N-1} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2N-1}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2N}\right) \\
 &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2N-2} + \frac{1}{2N}\right) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}\right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{N} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{N-1}{N}} + \frac{1}{1+\frac{N}{N}} \right)
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{N} \left( \frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{N-1}{N}} + \frac{1}{1+\frac{N}{N}} \right)$  est une somme de Riemann associée à la

fonction inverse avec  $a = 1$  et  $b = 2$ . On a donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{N} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{N}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{N}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{N-1}{N}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{N}} \right) \right\} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Finalemment :  $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{v,2N} = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2} + \ln 2 .$

### 3. Exercice type N° 3

---

Deux personnes, A et B, ont rendez-vous en un lieu donné entre 20h et 21h. Chacune décide aléatoirement et indépendamment de l'autre de son instant d'arrivée et aucune n'attendra l'autre plus d'un quart d'heure. On note  $T_A$  et  $T_B$  les variables aléatoires correspondant aux instants d'arrivée des personnes A et B. On suppose que  $T_A$  et  $T_B$  suivent des lois uniformes sur l'intervalle  $[20; 21]$ .

On s'intéresse à la probabilité que les deux personnes se rencontrent. On note  $p$  cette probabilité.

- a. Ecrire une fonction Python permettant de simuler des séries d'arrivées des deux personnes A et B et d'estimer la probabilité  $p$ .
- b. Calculer la valeur exacte de  $p$  à l'aide d'une approche graphique.

## 4. Exercice type N° 4

---

On considère la suite  $u$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

1. Ecrire une fonction Python recevant en argument un entier naturel  $N$  supérieur ou égal à 2 et renvoyant  $u_N$ .
2. A l'aide de votre programme, conjecturer la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  puis prouver votre conjecture.
3. Etudier la nature de la série  $\sum u_n$ .

## 5. Exercice type N° 5

---

**Ce sujet comporte deux parties indépendantes.**

### Partie N°1

---

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)) dt$$

Préciser le domaine de définition de  $f$ .

### Partie N°2

---

Ecrire une fonction Python `fCalc` recevant en arguments un réel  $x$  et un entier naturel non nul  $N$  et renvoyant une valeur approchée de  $f(x)$  obtenue grâce à l'approximation de l'intégrale par une somme de Riemann.

On testera la fonction `fCalc` avec  $x = 1$  et  $x = 10^{-5}$  (pour ce deuxième test, on prendra  $N = 10^6$ ).

## 6. Centrale 2015 Maths2 (PC)

---

Posons :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$$

1. Etude de  $f$

- a) Déterminer le domaine de définition  $I$  de  $f$ .
- b) Calculer des valeurs approchées de  $f(x)$  pour  $x \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ .
- c) Tracer le graphe de  $f$  sur  $I$ .
- d) La fonction  $f$  est-elle continue sur  $I$  ? De classe  $\mathcal{C}^2$  ?

2. Etude de  $g$

- a) Déterminer le domaine de définition  $J$  de  $g$ .
- b) Calculer des valeurs approchées de  $\frac{f(k)}{g(k)}$  pour  $k \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ . Emettre une conjecture.
- c) Démontrer la conjecture émise à la question précédente.