

# Informatique

## Préparation à l'oral.

---

Analyse et probabilités - Sujets

# 2016

### 1. Centrale PSI ♠♠

---

(Planche RMS 2016-2017 N°1045)

Pour  $n \geq 1$ , on pose  $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$  et  $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} dx$ .

- a) i) Justifier l'existence de  $I_n$ .
- ii) Ecrire une fonction Python qui calcule  $I_n$ . Conjecturer, à l'aide de l'ordinateur, la valeur de  $I_n$  (on ne demande pas de preuve).
- b) i) Justifier l'existence de  $J_n$ .
- ii) Ecrire une fonction Python qui calcule  $J_n$ .
- iii) A l'aide de l'ordinateur, conjecturer la convergence de la suite  $(J_n)$  puis la prouver en utilisant  $I_n$ .
- iv) Justifier l'existence de l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$  et calculer sa valeur.

## 2. D'après Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1079)

Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = x$  et  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}$ .

- Ecrire la fonction `Suite(n, x)` en Python qui renvoie  $u_n(x)$ . Tester pour plusieurs valeurs. Tracer  $u(1.6616)$  pour  $n \in \llbracket 0; 30 \rrbracket$  puis  $u(1.6617)$  pour  $n \in \llbracket 0; 17 \rrbracket$ .
- Montrer l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :
  - il existe  $l \geq 1$  tel que  $u_l < 1$
  - $(u_n) \rightarrow 0$
  - $(u_n)$  converge
- On pose  $w_n = \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$ . Montrer que  $(S_n)$  converge. On note  $\delta$  sa limite. Donner une approximation de  $\delta$  et de  $e^\delta$ .
- On pose  $v_n(x) = \frac{\ln(u_n(x))}{2^n}$ . Calculer  $v_{n+1}(x) - v_n(x)$ . En déduire l'expression de  $v_{n+1}(x)$  et  $u_{n+1}(x)$  en fonction de  $S_n$  et  $\ln(x)$ .
- A l'aide des résultats de la question précédente, expliquer les résultats obtenus à la question a).

## 3. D'après Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1046)

- Montrer que l'équation  $\operatorname{sh}(x) = 1$  admet une unique solution  $\alpha$ . Ecrire une fonction Python donnant un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude inférieure ou égale à  $\varepsilon > 0$  donné. Tester votre fonction avec  $\varepsilon = 10^{-5}$ .
- Soit  $(I_n)$  la suite définie par  $I_n = \int_0^\alpha \operatorname{sh}(t)^n dt$ . Ecrire une fonction Python `suite(n)` donnant des valeurs approchées de  $I_1, I_2, \dots, I_n$ .
- Trouver une relation de récurrence entre  $I_n$  et  $I_{n-2}$ .
- Montrer que la suite  $(I_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
- Donner un équivalent de  $I_n$  au voisinage de  $+\infty$ .
- La série de terme général  $(-1)^n I_n$  est-elle convergente ? Si oui, en donner, à l'aide d'un script Python et en justifiant la démarche mathématique sous-jacente, une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de la somme.
- La série de terme général  $I_n$  est-elle convergente ?

## 4. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1034)

On considère  $A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)} dx$

1. Montrer que cette intégrale converge.
2. Donner une valeur approchée de  $A$  à l'aide d'un programme Python.
3. Montrer que  $A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx$ .
4. On note  $\forall x > 0, F(x) = \int_0^x \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$ . Montrer que  $\forall x > 0, F(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$  et en déduire la valeur de  $A$ .

## 5. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1079)

On définit une suite de variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  indépendantes et suivant la même loi :

$P(X_i = 1) = p$  et  $P(X_i = 2) = 1 - p$ . On pose, pour  $n, k \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  et

$Y_k = \inf \{n \in \mathbb{N}^*, S_n \geq k\}$ .

- a) Montrer l'existence de  $Y_k$ . Ecrire une fonction Python d'arguments  $k$  et  $p$  renvoyant  $Y_k$ .
- b) Ecrire une suite d'instructions Python permettant de trouver une valeur approchée de  $m_k = E(Y_k)$  (on suppose  $p$  connu). Tracer la courbe définie par les points  $(k, m_k)$  pour  $k$  allant de 1 à 100 et  $p \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9\}$ .
- c) Pour  $k \geq 3, n \geq 1$ , montrer :  $P(Y_k = n) = p \times P(Y_{k-1} = n-1) + (1-p) \times P(Y_{k-2} = n-1)$ .
- d) Montrer que  $E(Y_k) = p \times E(Y_{k-1}) + (1-p) \times E(Y_{k-2}) + 1$ .
- e) Montrer que  $E(Y_k) \sim kC_p$  quand  $k$  tend vers l'infini, avec  $C_p$  qui ne dépend que de  $p$ .

## 6. Centrale PSI ♠♠

---

(Planche RMS 2016-2017 N°1080)

Deux amis se sont donné rendez-vous à 18 heures. Ils arrivent en retard de  $X$  et  $Y$  minutes respectivement. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur  $\llbracket 0 ; 59 \rrbracket$ .

- a) A quoi correspond la variable  $T = |X - Y|$  ?
- b) Donner la loi de  $T$ .
- c) Ecrire une fonction Python `rdv(n)` qui renvoie les résultats de  $n$  simulations de  $T$ .
- d) i) Calculer l'espérance exacte de  $T$ .  
ii) Donner une approximation de l'espérance avec Python. Commenter l'écart.
- e) On pose  $n = 10^5$ . Ecrire un programme qui renvoie approximativement la loi de  $T$  à l'aide du programme `rdv(n)`. Commenter les écarts.

## 7. Centrale PSI ♠♠

---

(Planche RMS 2016-2017 N°1083)

Pour  $t \neq -1$ , on pose :  $\varphi(t) = (f(t), g(t))$  avec  $f(t) = \frac{t}{1+t^3}$  et  $g(t) = \frac{t^2}{1+t^3}$ .

- a) Avec Python, tracer le support de cet arc.  
Etudier les symétries, réduire l'intervalle d'étude et déterminer le comportement de  $\varphi$  lorsque  $t$  tend vers  $-1$ .
- b) On remarque la présence d'une boucle. Estimer numériquement la longueur de cette boucle.
- c) Trouver une équation cartésienne de la courbe de la forme  $F(x, y) = 0$ .
- d) Montrer que  $\varphi(t_1)$ ,  $\varphi(t_2)$  et  $\varphi(t_3)$  sont alignés si, et seulement si,  $t_1 t_2 t_3 = -1$ .

**2015**

## 1. Exercice type N° 1

---

1. Rappeler le théorème donnant l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson.
2. Ecrire une fonction Python `Binom2Poisson` mettant en œuvre l'approximation précédente.

La fonction `Binom2Poisson` recevra en argument :

- Les paramètres  $n$  et  $p$  de la loi binomiale considérée.
- Le nombre de succès  $k$  souhaité.

Elle affichera :

- La valeur exacte de la probabilité  $P(X = k)$ .
- La valeur approchée de cette probabilité.
- L'erreur relative commise.

On utilisera les fonctions suivantes du module `math` de Python :

- `factorial`. Cette fonction reçoit en argument un entier naturel et renvoie la factorielle de cet entier.
- `exp`. Cette fonction reçoit en argument un nombre et en renvoie l'exponentielle.
- `pow`. Cette fonction reçoit en argument deux nombres  $x$  et  $y$  et renvoie  $x^y$ .

## 2. Exercice type N° 2

---

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_{u,N} = \sum_{n=1}^N u_n$  où la suite  $u$  est définie par :  $u_n = \frac{\sin n}{n}$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

1. Ecrire une fonction Python `Somme` qui calcule  $S_{u,N}$ . Cette fonction recevra comme argument un entier naturel non nul  $N$ . L'exécuter avec  $N = 100$ ,  $N = 500$  et  $N = 1000$ . Que peut-on conjecturer ?

2. On admet que l'on a :  $\sum_{n=1}^N u_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + \sum_{n=1}^{N-1} \left[ \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right]$ .
- Démontrer que  $\sum u_n$  converge.

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 et tout réel  $\alpha$  strictement positif, on pose

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^{n-1}} \text{ et } S_{v,N} = \sum_{n=2}^N v_n.$$

3. Ecrire une fonction Python Somme2 qui calcule  $S_{v,N}$ . Cette fonction recevra comme argument un entier naturel non nul  $N$  et un réel  $\alpha$ . La tester avec  $\alpha$  dans  $\left\{ \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2 \right\}$  et  $N = 100\,000$  puis  $N = 1\,000\,000$ .
- Que peut-on conjecturer quant à la nature de la série  $\sum v_n$  suivant le réel  $\alpha$  ?
4. Calculer la valeur de la somme pour  $\alpha = 1$ .

### 3. Exercice type N° 3

---

Deux personnes, A et B, ont rendez-vous en un lieu donné entre 20h et 21h. Chacune décide aléatoirement et indépendamment de l'autre de son instant d'arrivée et aucune n'attendra l'autre plus d'un quart d'heure. On note  $T_A$  et  $T_B$  les variables aléatoires correspondant aux instants d'arrivée des personnes A et B. On suppose que  $T_A$  et  $T_B$  suivent des lois uniformes sur l'intervalle  $[20; 21]$ .

On s'intéresse à la probabilité que les deux personnes se rencontrent. On note  $p$  cette probabilité.

- Ecrire une fonction Python permettant de simuler des séries d'arrivées des deux personnes A et B et d'estimer la probabilité  $p$ .
- Calculer la valeur exacte de  $p$  à l'aide d'une approche graphique.

## 4. Exercice type N° 4

---

On considère la suite  $u$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

1. Ecrire une fonction Python recevant en argument un entier naturel  $N$  supérieur ou égal à 2 et renvoyant  $u_N$ .
2. A l'aide de votre programme, conjecturer la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  puis prouver votre conjecture.
3. Etudier la nature de la série  $\sum u_n$ .

## 5. Exercice type N° 5

---

**Ce sujet comporte deux parties indépendantes.**

### Partie N°1

---

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)) dt$$

Préciser le domaine de définition de  $f$ .

### Partie N°2

---

Ecrire une fonction Python `fCalc` recevant en arguments un réel  $x$  et un entier naturel non nul  $N$  et renvoyant une valeur approchée de  $f(x)$  obtenue grâce à l'approximation de l'intégrale par une somme de Riemann.

On testera la fonction `fCalc` avec  $x = 1$  et  $x = 10^{-5}$  (pour ce deuxième test, on prendra  $N = 10^6$ ).

## 6. Centrale 2015 Maths2 (PC)

---

Posons :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$$

1. Etude de  $f$

- a) Déterminer le domaine de définition  $I$  de  $f$ .
- b) Calculer des valeurs approchées de  $f(x)$  pour  $x \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ .
- c) Tracer le graphe de  $f$  sur  $I$ .
- d) La fonction  $f$  est-elle continue sur  $I$  ? De classe  $\mathcal{C}^2$  ?

2. Etude de  $g$

- a) Déterminer le domaine de définition  $J$  de  $g$ .
- b) Calculer des valeurs approchées de  $\frac{f(k)}{g(k)}$  pour  $k \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$ . Emettre une conjecture.
- c) Démontrer la conjecture émise à la question précédente.