

Informatique

Préparation à l'oral.

Analyse et probabilités - Corrigés

2017

1. D'après Centrale PC ♠

(Planche Officiel de la Taupe Gyroscope 2017 N° 147)

1. Pour pouvoir calculer v_n , on utilise bien sûr la relation $v_n = u_n \sqrt{n}$. Il convient donc en

fait de calculer, lorsque $n \geq 1$, $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$.

$$\text{On a : } u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \times u_n = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right) \times u_n.$$

Cette relation de récurrence est intéressante car elle nous permet de mettre facilement (attention quand même aux valeurs du compteur dans le range) en œuvre une boucle for pour calculer u_n :

```
u=1
for i in range(1,n+1):
    u *= 1 - 1/(2*i)
```

On peut alors proposer la fonction V suivante :

```
def V(n):
    if n == 0:
        return(0)
    else:
        # Calcul de u(n)
        u = 1
        for i in range(1,n+1):
            u *= 1 - 1/(2*i)
        # On renvoie v(n)
        return(u * n**0.5)
```

Remarque : il n'est pas obligatoire de distinguer le cas $n=0$ du cas $n \geq 1$.

2. On importe classiquement le module `pyplot` de la bibliothèque `matplotlib` via l'instruction :

```
import pyplot from matplotlib as plt
```

Remarque : l'alias `n` n'est pas obligatoire !

Les différentes valeurs de l'entier n ($0 \leq n \leq 30$) sont placées dans la liste `N` et celles des v_n correspondantes dans la liste `VN` (la fonction `V` est bien sûr définie par ailleurs dans le script, par exemple après l'importation précédente) :

```
N, VN = [], []

for n in range(31):
    N.append(n)
    VN.append(V(n))

plt.clf()
plt.plot(N, VN, "x")
plt.show()
```

3. D'après l'affichage obtenu, il semblerait que la suite (v_n) soit croissante et convergente.
4. On a facilement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n > 0$.
Pour tout entier naturel n non nul, il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{u_{n+1}\sqrt{n+1}}{u_n\sqrt{n}} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{2(n+1)-1}{u_n} \times u_n \times \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{2n+1}{2(n+1)} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \\ &= \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2+n+\frac{1}{4}}{n^2+n}} = \sqrt{1+\frac{1}{4n(n+1)}} \end{aligned}$$

On a immédiatement $1+\frac{1}{4n(n+1)} > 1$ et donc $\sqrt{1+\frac{1}{4n(n+1)}} > 1$.

Comme $v_1 = 1 > 0 = v_0$, on en déduit finalement que la suite (v_n) est strictement croissante.

La suite (v_n) est strictement croissante.

5. D'après la question précédente, on a, pour tout n entier naturel non nul : $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

D'où : $\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} > 0$.

La série $\sum \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est donc une série à termes (strictement) positifs.

D'après la question précédente, on a :

$$\ln \frac{v_{n+1}}{v_n} = \ln \sqrt{1 + \frac{1}{4n(n+1)}} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4n(n+1)} \right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{8n^2}$$

Or la série $\sum \frac{1}{8n^2}$ est convergente en tant que série de Riemann convergente.

On en déduit finalement que la série $\sum \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est convergente.

La série $\sum \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est convergente.

Pour tout n entier naturel non nul, posons $S_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{v_{k+1}}{v_k}$.

$$\text{On a : } S_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{v_{k+1}}{v_k} = \ln \prod_{k=1}^n \frac{v_{k+1}}{v_k} = \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \times \frac{v_3}{v_2} \times \dots \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \times \frac{v_{n+1}}{v_n} \right) = \ln v_{n+1}$$

Comme la série $\sum \ln \frac{v_{n+1}}{v_n}$ converge, la suite (S_n) converge et il en va donc de même pour la suite $(\ln v_n)$ d'après l'égalité précédente.

Enfin, on a : $v_n = \exp(\ln v_n)$ et comme la fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} , on en déduit finalement que la suite (v_n) converge.

La suite (v_n) converge.

6. Pour tout n entier naturel non nul, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{2n-3}{2(n-1)} \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3) \times (2n-1)}{2^n \times n!} \\ &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots \times (2n-3) \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)}{(2^n \times n!)^2} \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \end{aligned}$$

On en tire alors :

$$v_n = u_n \sqrt{n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \sqrt{n}$$

La formule de Stirling s'écrit : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Il en découle immédiatement :

$$(2n)! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi \times 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} = 2\sqrt{\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \quad \text{et} \quad (n!)^2 \underset{+\infty}{\sim} \left(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2 = 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$$

D'où :

$$v_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} \times (n!)^2} \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\sqrt{\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \times 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \sqrt{n} = \frac{2\sqrt{\pi} \times n \times 2^{2n} \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \times 2\pi \times n \times \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

En d'autres termes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Remarque : cette valeur est conforme aux résultats obtenus aux questions 1 et 2.

7. On a $f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ sur $[0; 1]$.

Elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0; 1[$ et pour tout réel x de cet intervalle :

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}-1} \quad (\text{au regard du sujet, on n'effectue pas le calcul de l'exposant}).$$

On a alors :

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-2}$$

$$f^{(3)}(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-3} = -\frac{1}{2} \times \left(2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2 \times 2}\right) \times (1-x)^{\frac{1}{2}-3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{2} \times \left(2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2 \times 2}\right) \times \frac{5}{2} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-4} = -\frac{1}{2} \times \left(2 \times 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2 \times 2} \times \frac{5}{2 \times 3}\right) \times (1-x)^{\frac{1}{2}-4}$$

D'après ces premiers calculs, il semblerait que l'on ait, pour tout n entier naturel non nul :

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \times (n-1)! \times u_{n-1} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-n}$$

c'est-à-dire : $\lambda_n = -\frac{1}{2} \times (n-1)! \times u_{n-1}$.

Etablissons ce résultat par récurrence.

D’après les calculs précédents, la propriété est vraie pour $n = 1, 2, 3$ et 4.

Supposons alors que l’on ait $f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \times (n-1)! \times u_{n-1} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-n}$ pour un entier naturel n non nul donné.

On a alors :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= -\frac{1}{2} \times (n-1)! \times u_{n-1} \times \left(n - \frac{1}{2}\right) \times (1-x)^{\frac{1}{2}-n-1} \\ &= -\frac{1}{2} \times (n-1)! \times u_{n-1} \times \frac{2n-1}{2} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-(n+1)} \\ &= -\frac{1}{2} \times (n-1)! \times u_{n-1} \times \underbrace{\frac{2n-1}{2} \times n}_{=u_n} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-(n+1)} \\ &= -\frac{1}{2} \times n! \times u_n \times (1-x)^{\frac{1}{2}-(n+1)} \\ &= -\frac{1}{2} \times ((n+1)-1)! \times u_{(n+1)-1} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-(n+1)} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \times (n-1)! \times u_{n-1} \times (1-x)^{\frac{1}{2}-n}$$

2. D’après Centrale PSI ♠♠

(Planche Officiel de la Taube Gyroscope 2017 N°166)

Un plateau de type Monopoly comporte 12 cases numérotées de 0 à 11. Le joueur commence par la case 0.

On note Y_n la variable aléatoire associée au numéro de la case sur laquelle se trouve le joueur après le n -ième lancer d’un dé équilibré à 6 faces.

On considère les lancers du dé indépendants.

- Il convient de montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, la variable aléatoire Y_n peut prendre chaque valeur de l’ensemble $\llbracket 0; 11 \rrbracket$.

Nous établissons ce résultat par récurrence.

Dans un premier temps, notons que l'on a immédiatement $Y_0(\Omega) = \{0\}$ et $Y_n(\Omega) = \llbracket 1; 6 \rrbracket$.
 Pour déterminer $Y_2(\Omega)$, on s'intéresse aux sommes de la forme $a + b$ avec $(a, b) \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ (a et b correspondent aux valeurs du dé obtenues au cours des deux premiers lancers). Une telle somme peut prendre toutes les valeurs de l'ensemble $\llbracket 2; 12 \rrbracket$.
 Ainsi, en raisonnant modulo 12, en deux lancers de dé, le joueur pourra atteindre les cases numérotées : 0, 2, 3, ..., 10 et 11. La case numéro 1 ne peut être atteinte en deux lancers de dé : $Y_2(\Omega) = \llbracket 0; 11 \rrbracket$.

Nous initialisons notre récurrence à $n = 3$ en nous aidant du préambule précédent.

Si on a $Y_2 = 0$ alors on pourra atteindre au 3^{ème} lancer les cases numérotées 1 à 6.

Si on a $Y_2 = 6$ alors on pourra atteindre au 3^{ème} lancer les cases numérotées 7 à 11 et la case numérotée 0 (en sortant un 6).

Ainsi, au 3^{ème} lancer, toutes les cases du jeu peuvent être atteintes.

On a bien $Y_3(\Omega) = \llbracket 0; 11 \rrbracket$.

Si on suppose maintenant que $Y_n(\Omega) = \llbracket 0; 11 \rrbracket$, alors on montre, en raisonnant comme précédemment avec Y_2 , que Y_{n+1} pourra prendre toutes les valeurs de $\llbracket 0; 11 \rrbracket$.

On a bien $Y_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0; 11 \rrbracket$.

Finalement :

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow Y_n(\Omega) = \llbracket 0; 11 \rrbracket$
--

On a vu par ailleurs que l'on avait $Y_0(\Omega) = \{0\}$. On en déduit immédiatement :

$P(Y_0 = 0) = 1$. D'où la loi de Y_0 :

$Y_0(\Omega) = \{0\}$ et $P(Y_0 = 0) = 1$

2. Dans cette fonction, il convient de tirer n fois uniformément un entier compris (largement) entre 1 et 6 (on utilise donc la fonction `randint` du module `random`), d'additionner les valeurs obtenues et, enfin, d'en considérer le reste dans la division euclidienne par 12. D'où la fonction :

```
def Y_sim(n):
    if n == 0:
        return(0)
    else:
        S = 0
        for _ in range(n):
            S += randint(1,6)
        return(S%12)
```

3. On peut proposer le code suivant :

```
L = (50, 100, 200, 500)
N = 5000

for e in L:
    # On initialise un tableau numpy avec une ligne de 12 "0".
    F = np.zeros(12)
    for _ in range(N):
        # La valeur renvoyée par Y_sim est une réalisation de Y_n
        # et correspond simplement à l'indice dans le tableau F.
        # On augmente de un la valeur correspondante.
        F[Y_sim(e)] += 1
# Les fréquences sont obtenues en divisant chaque élément de F
# par le nombre de simulations effectuées (N).
F /= N
print(F)
```

Remarque : rappelons que la syntaxe :

```
for _ in range(N):
```

permet de construire une boucle `for` dont le compteur n'est pas explicitement utilisé. On peut alors s'affranchir de le nommer !

4. Les $(Y_n = i)$ forment une partition de l'univers et la formule des probabilités totales nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^{11} P((Y_{n+1} = k) \cap (Y_n = i)) \\ &= \sum_{i=0}^{11} P_{Y_n=i}(Y_{n+1} = k) \times P(Y_n = i) \end{aligned}$$

Clairement, certaines des probabilités conditionnelles $P_{Y_n=i}(Y_{n+1} = k)$ sont nulles.

Précisons les choses. Supposons que $Y_n = i$ soit réalisé. A partir de la case i , on peut atteindre les cases $i+1[12]$, $i+2[12]$, ..., $i+6[12]$ (Attention ! Il est indispensable de raisonner modulo 12). Comme on s'intéresse à l'événement $(Y_{n+1} = k)$, on va donc résoudre : $i+d \equiv k[12]$ où $d \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$.

Par exemple, avec $k=0$, on résout $i+d \equiv 0[12]$. Or $i \in \llbracket 0; 11 \rrbracket$ et $d \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ entraîne $i+d \in \llbracket 1; 17 \rrbracket$. Le seul multiple de 12 dans $\llbracket 1; 17 \rrbracket$ étant 12, on a $i+d = 12$, soit $i = 12 - d$. Avec $d \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, les valeurs possibles de i sont alors : 6, 7, ..., 11 et il vient :

$$P(Y_{n+1} = 0) = \sum_{i=6}^{11} P_{Y_n=i}(Y_{n+1} = k) \times P(Y_n = i) = \sum_{i=6}^{11} \frac{1}{6} \times P(Y_n = i) = \frac{1}{6} \sum_{i=6}^{11} P(Y_n = i)$$

Dans le cas général, on peut écrire qu'on ne retient que les valeurs de i telles que 12 divise $i - k + d$ (on en obtiendra systématiquement 6 puisque d varie dans $\llbracket 1; 6 \rrbracket$).

Finalement :

$$P(Y_{n+1} = k) = \sum_{\substack{i/12 \equiv -k+d \\ d \in \llbracket 1; 6 \rrbracket}} P_{Y_n=i}(Y_{n+1} = k) \times P(Y_n = i)$$

5. A partir de la question précédente, on a facilement :

$$P(Y_{n+1} = 0) = \frac{1}{6} (P(Y_n = 6) + P(Y_n = 7) + P(Y_n = 8) + P(Y_n = 9) + P(Y_n = 10) + P(Y_n = 11))$$

$$P(Y_{n+1} = 1) = \frac{1}{6} (P(Y_n = 0) + P(Y_n = 7) + P(Y_n = 8) + P(Y_n = 9) + P(Y_n = 10) + P(Y_n = 11))$$

$$P(Y_{n+1} = 2) = \frac{1}{6} (P(Y_n = 0) + P(Y_n = 1) + P(Y_n = 8) + P(Y_n = 9) + P(Y_n = 10) + P(Y_n = 11))$$

...

$$P(Y_{n+1} = 6) = \frac{1}{6} (P(Y_n = 0) + P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2) + P(Y_n = 3) + P(Y_n = 4) + P(Y_n = 5))$$

$$P(Y_{n+1} = 7) = \frac{1}{6} (P(Y_n = 1) + P(Y_n = 2) + P(Y_n = 3) + P(Y_n = 4) + P(Y_n = 5) + P(Y_n = 6))$$

$$P(Y_{n+1} = 8) = \frac{1}{6} (P(Y_n = 2) + P(Y_n = 3) + P(Y_n = 4) + P(Y_n = 5) + P(Y_n = 6) + P(Y_n = 7))$$

...

$$P(Y_{n+1} = 11) = \frac{1}{6} (P(Y_n = 5) + P(Y_n = 6) + P(Y_n = 7) + P(Y_n = 8) + P(Y_n = 9) + P(Y_n = 10))$$

On en tire immédiatement T :

$$T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons (s'en étonnera-t-on ?) que la matrice T est une matrice stochastique. Elle est également dite « circulante » car on passe d'une colonne (ou d'une ligne) à la suivante en effectuant une permutation circulaire.

A partir de $U_{n+1} = T.U_n$, une récurrence immédiate nous donne $U_n = T^n.U_0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = T^n.U_0$$

Notons, en passant, que $U_0 = (1, 0, \dots, 0)^T$. Ainsi, U_n correspond « simplement » à la première colonne de T^n .

6. Si on considère $J \in \mathcal{M}_{12}(\mathbb{R})$ d'endomorphisme canoniquement associé φ tel que $\varphi(e_1) = e_{12}$ et pour tout entier i dans $[[2; 12]]$, $\varphi(e_i) = e_{i-1}$, on montre facilement que $\varphi^{12} = \text{Id}$. C'est-à-dire : $J^{12} = I_{12}$.

Ainsi, le polynôme $X^{12} - 1$ est annulateur de J . Comme il est unitaire, il s'agit du polynôme caractéristique de A .

Dans \mathbb{C} , il est scindé à racines simples (ce sont les racines 12-ièmes de l'unité). La matrice J est donc diagonalisable dans \mathbb{C} et il existe donc une matrice inversible P de $\mathcal{M}_{12}(\mathbb{C})$ telle que $J = P.D.P^{-1}$ où D est la matrice diagonale des racines 12-ièmes de l'unité).

On a immédiatement : $T = \frac{1}{6}(J + J^2 + J^3 + J^4 + J^5 + J^6)$.

Or, pour tout entier naturel k , on a : $J^k = P.D^k.P^{-1}$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{6}(P.D.P^{-1} + P.D^2.P^{-1} + P.D^3.P^{-1} + P.D^4.P^{-1} + P.D^5.P^{-1} + P.D^6.P^{-1}) \\ &= P \left[\frac{1}{6}(D + D^2 + D^3 + D^4 + D^5 + D^6) \right] P^{-1} \end{aligned}$$

Comme la matrice D est diagonale, que toute puissance d'une matrice diagonale est diagonale, que la somme de deux matrices diagonales est diagonale et que le produit d'une matrice diagonale par un scalaire est diagonal, il en va de même pour la matrice $\frac{1}{6}(D + D^2 + D^3 + D^4 + D^5 + D^6)$.

On conclut de l'égalité obtenue que la matrice T est diagonalisable dans \mathbb{C} , de surcroît dans la même base de vecteurs propres que J .

La matrice T est diagonalisable dans \mathbb{C} .

7. On peut considérer le script suivant :

```

p = 1/6
T = np.array([
    [0,p,p,p,p,p,p,0,0,0,0,0],
    [0,0,p,p,p,p,p,p,0,0,0,0],
    [0,0,0,p,p,p,p,p,p,0,0,0],
    [0,0,0,0,p,p,p,p,p,p,0,0],
    [0,0,0,0,0,p,p,p,p,p,p,0],
    [0,0,0,0,0,0,p,p,p,p,p,p],
    [p,0,0,0,0,0,0,p,p,p,p,p],
    [p,p,0,0,0,0,0,0,p,p,p,p],
    [p,p,p,0,0,0,0,0,0,p,p,p],
    [p,p,p,p,0,0,0,0,0,0,p,p],
    [p,p,p,p,p,0,0,0,0,0,0,p],
    [p,p,p,p,p,p,0,0,0,0,0,0],
])

L = [5,10,20,50,100]

for e in L:
    E = np.identity(12)
    for i in range(e):
        E = np.dot(E,T)
    print(E[:,0])

```

Comme mentionné plus haut, le produit $T^n.U_0$ correspond simplement à la première colonne de la matrice T^n . D'où la dernière ligne du script.

3. Centrale PSI ♠♠

(Planche Officiel de la Taupé Gyroscopie 2017 N°168)

1. Soit n un entier naturel non nul. Posons, comme suggéré par l'énoncé :

$$\varphi(x) = (2 - e^x)f(x) = 1.$$

La formule de Leibniz nous donne (on ne s'arrêtera pas à l'abus de notation désormais

classique : « $(2 - e^x)^{(k)}$ ») :
$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2 - e^x)^{(k)} f^{(n-k)}(x) = 0.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2 - e^x)^{(k)} f^{(n-k)}(x) \\
 &= \binom{n}{0} (2 - e^x)^{(0)} f^{(n-0)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2 - e^x)^{(k)} f^{(n-k)}(x) \\
 &= (2 - e^x) f^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2 - e^x)^{(k)} f^{(n-k)}(x)
 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel k non nul, on a : $(2 - e^x)^{(k)} = -e^x$. D'où :

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - e^x) f^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (2 - e^x)^{(k)} f^{(n-k)}(x) \\ &= (2 - e^x) f^{(n)}(x) - e^x \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= (2 - e^0) f^{(n)}(0) - e^0 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(0) \\ &= f^{(n)}(0) - \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(n-k)! \times k!} f^{(n-k)}(0) \\ &= n! \times \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{f^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \right) \\ &= n! \times \left(a_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} a_{n-k} \right) \\ &= n! \times \left(a_n - \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!} \right) \end{aligned}$$

On en tire immédiatement : $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$.

On a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}$$

2. On aura, au préalable, importé la fonction factorial du module math.

Par ailleurs, on a : $a_0 = f(0) = \frac{1}{2 - e^0} = \frac{1}{1} = 1$.

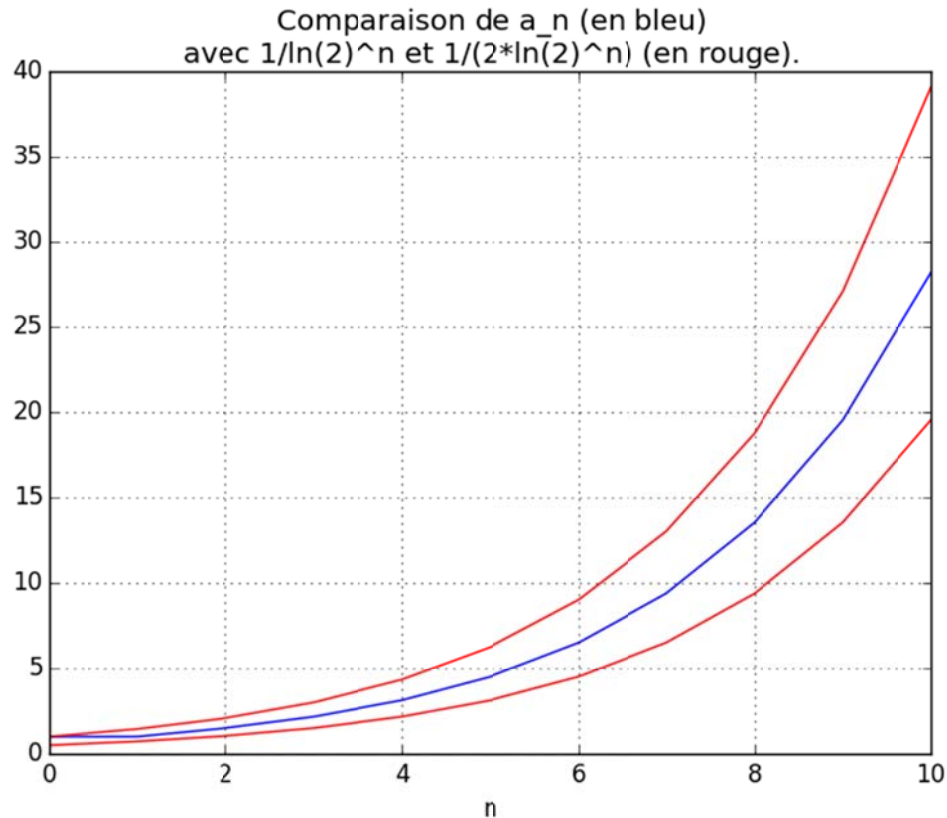
On peut donc considérer le script suivant :

```
# Indice maximum
nmax = 10

# On place les a(n) dans la liste A que l'on initialise avec a(0)=1
A = [1.]
for n in range(1, nmax+1):
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        S += A[n-k]/factorial(k)
    A.append(S)

# On génère un affichage "propre" du contenu de A
for i in range(nmax+1):
    print("a(" + str(i) + ") = " + str(A[i]))
```

3. Pour $n \in \llbracket 0; 10 \rrbracket$, on obtient :



On peut immédiatement conjecturer que l'on a, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2(\ln 2)^n} \leq a_n \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}$$

Admettons que la conjecture précédente soit vraie.

Soit alors R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Soit alors r un réel strictement positif tel que $(a_n r^n)$ soit bornée.

Il existe alors un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n r^n \leq M$. On en déduit alors

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2(\ln 2)^n} r^n \leq M$, c'est-à-dire $\left(\left(\frac{r}{\ln 2} \right)^n \right)$ est bornée. On en tire immédiatement $r \leq \ln 2$ et donc $R \leq \ln 2$.

Soit maintenant r un réel strictement positif tel que $(a_n r^n)$ ne soit pas bornée.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \frac{1}{(\ln 2)^n}$, on en déduit que $\left(\frac{r^n}{(\ln 2)^n}\right)$, c'est-à-dire $\left(\left(\frac{r}{\ln 2}\right)^n\right)$, n'est pas bornée et donc que $r > \ln 2$. D'où : $R \geq \ln 2$.

Des deux inégalités précédentes, on déduit que l'on a $R = \ln 2$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à $\ln 2$.

4. Comme on souhaite obtenir les courbes représentatives des fonctions S_0, S_1, \dots, S_6 , on va construire, pour stocker les valeurs prises par les fonctions S_i , un tableau numpy comportant 7 lignes (une par fonction) et 101 colonnes (l'intervalle $[0; \ln 2[$ étant petit, 101 points suffisent...).

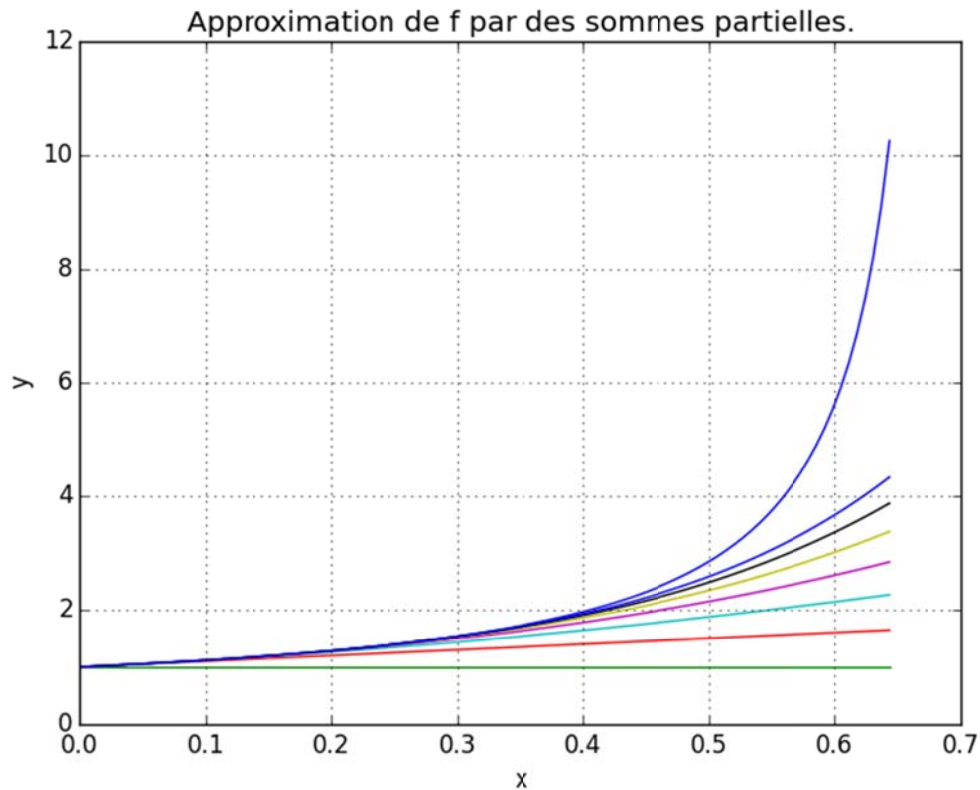
```
# Initialisations
npoints = 101
X = np.linspace(0, log(2)-0.05, npoints)
nS = 6
YF = []
YS = np.zeros((nS+1, npoints))

# Valeurs prises par la fonction f
for e in X:
    YF.append(1/(2-exp(e)))

# Valeurs prises par les S_n
for i in range(npoints):
    y = 0
    for j in range(nS+1):
        y += A[j]*X[i]**j
    YS[j,i] = y

# Tracés
plt.clf()
plt.grid()
plt.plot(X, YF)
for n in range(nS+1):
    plt.plot(X, YS[n, :])
plt.show()
```

On obtient alors :



D'après les courbes obtenues ci-dessus, il semblerait que la série entière $\sum a_n x^n$ converge vers la fonction f .

Nous allons donc montrer que f est développable en série entière sur l'intervalle

$$]-\ln 2; \ln 2[\text{ et que : } \forall x \in]-\ln 2; \ln 2[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S(x).$$

Notons tout d'abord que l'on a : $f(0) = S(0) = a_0 = 1$.

Ensuite, de $(2 - e^x)f(x) = 1$, nous tirons, en dérivant : $-e^x f(x) + (2 - e^x)f'(x) = 0$

Ainsi, la fonction f est l'unique solution (l'unicité découle du théorème de Cauchy-Lipschitz), sur l'intervalle $]-\ln 2; \ln 2[$, de l'équation différentielle

$$(2 - e^x)y' - e^x y = 0 \text{ vérifiant } y(0) = 1.$$

Comme la fonction S est également définie sur l'intervalle $]-\ln 2; \ln 2[$ et vérifie

$S(0) = 1$, il suffit de montrer qu'elle est solution de l'équation différentielle

$$(2 - e^x)y' - e^x y = 0 \text{ pour pouvoir conclure qu'elle est égale à } f.$$

$$\text{On a : } (2 - e^x)y' - e^x y = 0 \Leftrightarrow 2y' = e^x(y + y').$$

Pour tout réel x de l'intervalle $] -\ln 2 ; \ln 2[$ (disque ouvert de convergence), on a :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

La fonction S y est dérivable et on a : $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n .$

Il vient alors (produit de Cauchy de deux séries entières) :

$$\begin{aligned} e^x \times (S(x) + S'(x)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (a_{n-k} + (n-k+1) a_{n-k+1}) \right) x^n \end{aligned}$$

Intéressons-nous à $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (a_{n-k} + (n-k+1) a_{n-k+1}) .$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (a_{n-k} + (n-k+1) a_{n-k+1}) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_{n-k}}{k!} + \frac{n-k+1}{k!} a_{n-k+1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k}}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{n-k+1}{k!} a_{n-k+1} \\ &= a_n + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}}_{a_n} + \sum_{k=0}^n (n+1) \frac{a_{n-k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{k}{k!} a_{n-k+1} \\ &= a_n + a_n + (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{a_{n-k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{k!} a_{n-k+1} \\ &= 2a_n + (n+1) a_{n+1} + (n+1) \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k+1}}{(k-1)!} \\ &= 2a_n + (n+1) a_{n+1} + (n+1) \times \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{n-k+1}}{k!}}_{=a_{n+1}} - \frac{a_0}{(n+1)!} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{k!} \\ &= 2a_n + (n+1) a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - \frac{a_0}{n!} - \left(a_n + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{a_{n-k}}{k!}}_{a_n} - \frac{a_0}{n!} \right) \\ &= 2a_n + 2(n+1) a_{n+1} - \frac{a_0}{n!} - \left(2a_n - \frac{a_0}{n!} \right) \\ &= 2(n+1) a_{n+1} \end{aligned}$$

D'où : $e^x \times (S(x) + S'(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^n = 2S'(x) .$

La fonction S est bien solution de l'équation différentielle $(2 - e^x)y' - e^x y = 0$ sur l'intervalle $]-\ln 2; \ln 2[$. Comme elle vérifie $S(0) = 1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous permet de conclure qu'elle est égale à la fonction f .

Finalement :

La fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $]-\ln 2; \ln 2[$ et pour tout réel x de cet intervalle, on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

4. ENSAM PSI ♠

(Planche Officiel de la Taupe Gyroscope 2017 N° 246)

1. Pour éviter de multiples accès aux éléments du tableau passé en argument, on le transforme en un tuple avant de renvoyer le résultat du calcul :

```
def f(u):
    (x,y) = tuple(u)
    return(x**4 + 2*y**2 + 2*x*y)
```

2. Rappelons que l'on a, pour f admettant des dérivées partielles par rapport à x et y (c'est le cas ici puisque f est polynômiale) :

$$\nabla f(x, y) = \overline{\text{grad}}_f(x, y) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \end{pmatrix}$$

Il vient immédiatement :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = 4x^3 + 2y \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = 4y + 2x$$

D'où la fonction demandée :

```
def nabla(u):
    (x,y) = tuple(u)
    return(np.array([4*x**3 + 2*y, 4*y + 2*x]))
```

3. Au point $A_k(x_k, y_k)$, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}_f(x_k, y_k)$ est normal à la courbe C . En supposant

que ce vecteur est non nul, le vecteur $\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_k, y_k) \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_k, y_k) \end{pmatrix}$ est alors un vecteur tangent à C

en ce point.

Le vecteur $\overrightarrow{t}_k = \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_k, y_k)\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_k, y_k)\right)^2}} \times \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_k, y_k) \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_k, y_k) \end{pmatrix}$ est alors un

vecteur unitaire tangent à C en $A_k(x_k, y_k)$.

Remarquons que l'égalité $\overrightarrow{A_k A_{k+1}} = \text{pas} \times \overrightarrow{t}_k$ revient à mettre en œuvre un schéma d'Euler explicite au niveau de chacune des coordonnées des points de C .

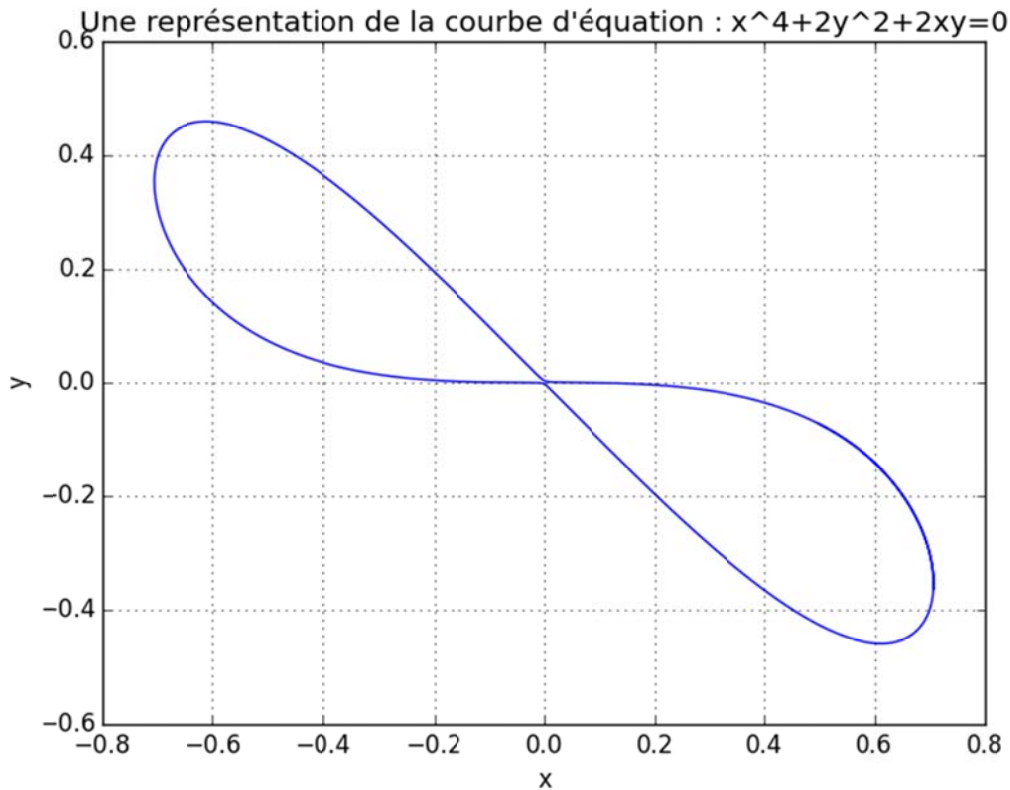
D'où la fonction :

```
def points(A,f,pas,n):
    if f(A) > 10**-5:
        return("Le point initial n'est pas valide !")
    else:
        L = [A]
        for i in range(n-1):
            (dx,dy) = tuple(nabla(A))
            A = A + (pas/(dx**2+dy**2)**0.5)*np.array([dy,-dx])
            L.append(A)
        return(L)
```

4. Avec quelques compléments (titre, légendes, grille), on peut considérer le script suivant :

```
n = 400000
u = np.array([0.5, (1-2**0.5)/(4*2**0.5)])
B = points(u,f,0.00001,n)
X, Y = [], []
for i in range(n):
    X.append(B[i][0])
    Y.append(B[i][1])
plt.clf()
plt.grid()
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Une représentation de la courbe d'équation : x^4+2y^2+2xy=0")
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

On obtient alors :



5. D'après CCP MP ♠

(Planche Officiel de la Taupe Gyroscope 2017 N° 187)

1. Il convient ici de choisir quatre entiers dans $\{-1; +1\}$, chacun de ces deux nombres ayant la même probabilité, à chaque fois, d'être obtenu.

On peut procéder de diverses façons. Nous choisissons ici d'utiliser la fonction `randint` pour obtenir de façon équiprobable un entier n dans $\{0; +1\}$. L'entier $2n-1$ appartiendra alors à $\{-1; +1\}$.

D'où le code :

```
def Mgen():
    A = np.zeros((2,2))
    seed()
    for i in range(2):
        for j in range(2):
            n = randint(0,1)
            A[i,j] = 2*randint(0,1) - 1
    return(A/np.sqrt(2))
```

2. On a : $\det(M) = \frac{1}{2}(X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1})$.

D'où, par linéarité de l'espérance :

$$E(\det(M)) = E\left(\frac{1}{2}(X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1})\right) = \frac{1}{2}(E(X_{1,1}X_{2,2}) - E(X_{1,2}X_{2,1}))$$

L'indépendance des variables aléatoires considérées nous donne alors :

$$E(\det(M)) = \frac{1}{2}(E(X_{1,1}X_{2,2}) - E(X_{1,2}X_{2,1})) = \frac{1}{2}(E(X_{1,1})E(X_{2,2}) - E(X_{1,2})E(X_{2,1}))$$

On a pour tout $(i, j) \in \{1; 2\}^2$: $E(X_{i,j}) = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 1 = 0$ et on en tire finalement :

$E(\det(M)) = 0$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} V(\det(M)) &= E(\det(M)^2) - \underbrace{E(\det(M))^2}_{=0} \\ &= E(\det(M)^2) \\ &= E\left(\left(\frac{1}{2}(X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1})\right)^2\right) \\ &= E\left(\frac{1}{4}(X_{1,1}^2X_{2,2}^2 - 2X_{1,1}X_{2,2}X_{1,2}X_{2,1} + X_{1,2}^2X_{2,1}^2)\right) \\ &= \frac{1}{4}(E(X_{1,1}^2X_{2,2}^2) - 2E(X_{1,1}X_{2,2}X_{1,2}X_{2,1}) + E(X_{1,2}^2X_{2,1}^2)) \end{aligned}$$

Remarquons que les variables aléatoires $X_{1,1}^2X_{2,2}^2$ et $X_{1,2}^2X_{2,1}^2$ prennent toutes deux la valeur 1 avec une probabilité égale à... 1 !

On a donc immédiatement : $E(X_{1,1}^2X_{2,2}^2) = E(X_{1,2}^2X_{2,1}^2) = 1$.

Par ailleurs, l'indépendance des variables aléatoires considérées nous donne :

$$E(X_{1,1}X_{2,2}X_{1,2}X_{2,1}) = E(X_{1,1})E(X_{2,2})E(X_{1,2})E(X_{2,1}) = 0$$

Finalement :

$$\begin{aligned} V(\det(M)) &= \frac{1}{4}(E(X_{1,1}^2X_{2,2}^2) - 2E(X_{1,1}X_{2,2}X_{1,2}X_{2,1}) + E(X_{1,2}^2X_{2,1}^2)) \\ &= \frac{1}{4}(1 - 2 \times 0 + 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$V(\det(M)) = \frac{1}{2}$

3. Notons que les colonnes de la matrice correspondent à des vecteurs de norme 1.

La matrice M est donc orthogonale si et seulement si ces deux vecteurs sont orthogonaux c'est-à-dire si et seulement si : $X_{1,1}X_{1,2} + X_{2,1}X_{2,2} = 0$.

Les variables aléatoires ne prenant que les valeurs -1 et 1 , l'expression

$X_{1,1}X_{1,2} + X_{2,1}X_{2,2}$ sera nulle si, et seulement si, une ou trois des quatre variables aléatoires prennent la valeur -1 . Le nombre de configurations correspondantes vaut $\binom{4}{1} + \binom{4}{3} = 4 + 4 = 8$ sur un total de $2^4 = 16$ configurations. La probabilité cherchée

vaut donc : $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

La probabilité que M soit orthogonale vaut $\frac{1}{2}$.

La probabilité que M ne soit pas inversible est égale à la probabilité que $\det(M)$ soit nul, soit : $P\left(\frac{1}{2}(X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1}) = 0\right)$, soit encore : $P(X_{1,1}X_{2,2} = X_{1,2}X_{2,1})$.

Or :

$$\begin{aligned} P(X_{1,1}X_{2,2} = X_{1,2}X_{2,1}) &= P((X_{1,1}X_{2,2} = X_{1,2}X_{2,1} = 1) \cup (X_{1,1}X_{2,2} = X_{1,2}X_{2,1} = -1)) \\ &= P(X_{1,1}X_{2,2} = X_{1,2}X_{2,1} = 1) + P(X_{1,1}X_{2,2} = X_{1,2}X_{2,1} = -1) \end{aligned}$$

Or, l'événement « $X_{1,1}X_{2,2} = X_{1,2}X_{2,1} = 1$ » est réalisé pour les quatre configurations suivantes (nous omettons le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pour alléger les écritures) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'événement « $X_{1,1}X_{2,2} = X_{1,2}X_{2,1} = -1$ » pour :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la probabilité que M ne soit pas inversible vaut : $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Finalement :

La probabilité que M soit inversible vaut $\frac{1}{2}$.

Le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$\begin{aligned} \chi_M(X) &= \det(XI_2 - M) = \begin{vmatrix} X - \frac{1}{\sqrt{2}}X_{1,1} & -\frac{1}{\sqrt{2}}X_{1,2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}X_{2,1} & X - \frac{1}{\sqrt{2}}X_{2,2} \end{vmatrix} \\ &= X^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{1,1} + X_{2,2})X + \frac{1}{2}(X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1}) \end{aligned}$$

Sont discriminant vaut :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}(X_{1,1} + X_{2,2})^2 - 2(X_{1,1}X_{2,2} - X_{1,2}X_{2,1}) \\ &= \frac{1}{2}(X_{1,1} - X_{2,2})^2 + 2X_{1,2}X_{2,1} \end{aligned}$$

Les valeurs possibles de $\frac{1}{2}(X_{1,1} - X_{2,2})^2$ sont 0 ($X_{1,1} = X_{2,2}$) et 2 ($X_{1,1} = -X_{2,2}$) et celles de $2X_{1,2}X_{2,1}$ sont -2 ($X_{1,2} = -X_{2,1}$) et 2 ($X_{1,2} = X_{2,1}$). Ainsi, les valeurs possibles de Δ sont $-2, 0, 2$ et 4.

- $\Delta < 0$

Cette situation correspond à la réalisation de l'événement :

$$(X_{1,1} = X_{2,2}) \cap (X_{1,2} = -X_{2,1})$$

On a alors les quatre configurations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, M n'admet pas de valeurs propres réelles et n'est donc pas diagonalisable sur \mathbb{R} .

- $\Delta = 0$

Cette situation correspond à la réalisation de l'événement :

$$(X_{1,1} = -X_{2,2}) \cap (X_{1,2} = -X_{2,1})$$

On a encore quatre configurations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on a simplement $\chi_M(X) = X^2$ mais on constate que dans les quatre configurations ci-dessus, le rang de la matrice vaut 1. La dimension du noyau vaut donc 1 également alors que l'ordre de multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique vaut 2 : M n'est pas diagonalisable.

- $\Delta > 0$

8 configurations au total correspondent à cette situation.

Le polynôme caractéristique de M est scindé à racines réelles simples : M est diagonalisable sur \mathbb{R} .

En définitive, la probabilité que M soit diagonalisable est égale à $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

La probabilité que M soit diagonalisable vaut $\frac{1}{2}$.

4. On peut considérer le script suivant :

```
# Initialisations
N = 50000
LDET, LDET2, LDIS = [], [], []
Cinv, Cortho, Cdiag = 0, 0, 0

# Boucle principale
for i in range(N):
    M = Mgen()
    d = det(M)
    LDET.append(d)
    LDET2.append(d**2)
    dis = (M[0,0] + M[1,1])**2 - 4*d
    if d != 0:
        Cinv += 1
        if abs(M[0,0]*M[0,1] + M[1,0]*M[1,1]) < 10**-6:
            Cortho += 1
    if dis > 1:
        Cdiag += 1

# Synthèses et affichage des résultats
# Espérance du déterminant
mdet = sum(LDET)/N
print("Valeur moyenne du déterminant :",mdet)
# Variance du déterminant
print("Variance du déterminant :",sum(LDET2)/N-mdet**2)
# Fréquences
print("Fréquence des matrices inversibles :",Cinv/N)
print("Fréquence des matrices orthogonales :",Cortho/N)
print("Fréquence des matrices diagonalisables :",Cdiag/N)
```

2016

1. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N° 1045)

1. i) Pour tout n entier naturel non nul, on s'intéresse à $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$.

La fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ est bien définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$.

On peut écrire : $\frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} = x \mapsto n^2 \times \frac{\sin^2(nx)}{(nx)^2} \times \frac{x^2}{\sin^2(x)} = n^2 \times \left(\frac{\sin(nx)}{nx} \right)^2 \times \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{nx} = 1$, il vient immédiatement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} = n^2$.

La fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)}$ admettant une limite finie en 0 à droite, on en déduit immédiatement que I_n existe.

ii) On utilise la méthode des trapèzes dont on rappelle la formule générale :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &\approx \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(N-1)h) + f(b)] \\ &= h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(N-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \end{aligned}$$

avec $h = \frac{b-a}{N}$.

On considère ici :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} & \text{si } x \in]0; \frac{\pi}{2}[\\ n^2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a donc : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

On peut donc considérer le code suivant (on n'aura pas oublié d'importer pi et sin du module math, par exemple) :

```
def FoncIn(n):
    N = 10000
    I = 0
    h = pi/(2*N)
    if n//2 == 0:
        d = 0
    else:
        d = 1
    I = (n**2 + d)/2
    for i in range(1,N):
        I += sin(n*(i*h))**2/sin(i*h)**2
    I *= h
    return(I)
```

En testant ce code pour diverses valeurs de n (typiquement 10, 100, 1000, ...) ou en représentant graphiquement I_n en fonction de n , on peut conjecturer :

$$I_n = n \frac{\pi}{2}$$

2. i) On procède de façon similaire à ce qui a été fait à la question a) i).

La fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{nx^2}$ est bien définie sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}]$.

On peut écrire : $\frac{\sin^2(nx)}{nx^2} = x \mapsto n \times \frac{\sin^2(nx)}{(nx)^2} = n \times \left(\frac{\sin(nx)}{nx} \right)^2$.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{nx} = 1$, il vient immédiatement : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} = n$.

La fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{nx^2}$ admettant une limite finie en 0 à droite, on en déduit immédiatement que J_n existe.

ii) On considère cette fois :

$$g : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} & \text{si } x \in]0; \frac{\pi}{2}] \\ n & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{n \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On peut alors considérer le code :

```
def FoncJn(n):
    N = 100000
    J = 0
    h = pi/(2*N)
    if n//2 == 0:
        d = 0
    else:
        d = 4/(n*pi**2)
    J = (n + d)/2
    for i in range(1,N):
        J += sin(n*(i*h))**2/(n*(i*h)**2)
    J *= h
    return(J)
```

En testant ce code pour diverses valeurs de n (typiquement 10, 100, 1000, ...), on peut conjecturer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$$

Pour établir ce résultat, nous admettons que l'on a, pour tout entier naturel n non nul :

$I_n = n \frac{\pi}{2}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi}{2} - J_n \right| &= \left| \frac{1}{n} I_n - J_n \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{n \sin^2(x)} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} dx \right| = \frac{1}{n} \left| \int_0^{\pi/2} \sin^2(nx) \times \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right) dx \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx) \times (x^2 - \sin^2(x))}{\sin^2(x) \times x^2} dx \right| \leq \frac{1}{n} \times \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin^2(nx) \times (x^2 - \sin^2(x))}{\sin^2(x) \times x^2} \right| dx \\ &\leq \frac{1}{n} \times \int_0^{\pi/2} \left| \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} \right| dx \end{aligned}$$

On a classiquement : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et donc : $\sin^2(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.

Ainsi : $x^2 - \sin^2(x) = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$ et :

$$\frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} = \frac{x^2}{\sin^2(x)} \times \frac{\frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4} = \frac{x^2}{\sin^2(x)} \times \left(\frac{1}{3} + o(1) \right)$$

Enfin : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} = \frac{1}{3}$.

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \left| \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} \right| dx$ existe donc et on déduit de l'inégalité

$\left| \frac{\pi}{2} - J_n \right| \leq \frac{1}{n} \times \int_0^{\pi/2} \left| \frac{x^2 - \sin^2(x)}{\sin^2(x) \times x^2} \right| dx$ que l'on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\pi}{2} - J_n \right| = 0$. On a bien :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}}$$

iv) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 1$, il n'y a pas de problème en 0.

Par ailleurs, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ converge car $\forall x \in [1; +\infty[$, $0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$ existe.

Dans $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} dx$, nous effectuons le changement de variable $t = nx$. Il vient :

$$J_n = \int_0^{n \times \pi/2} \frac{\sin^2(t)}{n \left(\frac{t}{n} \right)^2} dt = \int_0^{n \times \pi/2} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$

On en déduit alors : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}}$$

2. D'après Centrale PSI ♠ ♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1079)

A venir...

3. D'après Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1046)

- a) On considère la fonction sinus hyperbolique définie sur \mathbb{R} . Elle y est dérivable, et donc continue, de dérivée la fonction cosinus hyperbolique qui est strictement positive. La fonction sh est donc strictement croissante sur \mathbb{R} . Comme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty, \text{ on}$$

déduit de ce qui précède que la fonction sh définit une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Finalement :

L'équation $\operatorname{sh}(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a : $\operatorname{sh}(0) = 0 < 1$ et $\operatorname{sh}(1) = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} \approx 1,1752 > 1$. On a donc $\alpha \in]0; 1[$.

Pour obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à $\varepsilon > 0$, on peut donc utiliser l'algorithme de dichotomie avec, comme valeurs initiales des bornes de l'intervalle $a = 0$ et $b = 1$. Rappelons qu'à chaque étape, l'amplitude A_n (on a donc ici

$A_0 = 1$) de l'intervalle est divisée par 2 : $A_n = \frac{1}{2^n}$. Soit N le nombre minimum d'étapes

requises pour avoir $A_n \leq \varepsilon$.

On a $A_n \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow -n \ln 2 \leq \ln \varepsilon \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2}$. D'où $N = \left\lceil -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 2} \right\rceil + 1$.

On peut donc proposer la fonction Python EncadreAlpha suivante qui reçoit en argument ε (epsilon) et renvoie un tuple formé des bornes, inférieure et supérieure, de l'intervalle encadrant α et de leur différence (i.e. l'amplitude de l'intervalle) :

```
def EncadreAlpha(epsilon):
    a, b = 0., 1.
    if epsilon <= 0:
        return("Précision négative !")
    elif epsilon < 1:
        N = int(-log(epsilon)/log(2)) + 1
        for i in range(N):
            m = (a + b) / 2
            if (sinh(a) - 1) * (sinh(m) - 1) < 0:
                b = m
            else:
                a = m
        return(a,b,b - a)
```

Avec $\varepsilon = 10^{-5}$, on obtient :

$$0,881\,370 < \alpha < 0,881\,379$$

Note : on a arrondi les valeurs des bornes à 10^{-6} , par défaut pour la borne inférieure et par excès pour la borne supérieure.

- b) On commence par écrire une fonction Python implémentant la méthode des trapèzes pour la fonction $t \mapsto \text{sh}(t)^n$ sur l'intervalle $[a; b]$ ($a < b$) :

```
def IntTrap(a,b,N,n):
    from numpy import linspace
    I = 0
    h = (b-a)/N
    X = linspace(a,b,N+1)
    I = (sinh(a)**n + sinh(b)**n)/2
    for i in range(1,N):
        I += sinh(X[i])**n
    I *= h
    return(I)
```

On a alors la fonction suite demandée :

```
def suite(n):
    for i in range(1,n+1):
        I = IntTrap(0,alpha,10000,i)
        print(I,i*I)
```

- c) Soit n un entier naturel supérieure ou égal à 2.
On a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\alpha \text{sh}(t)^n dt \\ &= \int_0^\alpha \text{sh}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt \\ &= \int_0^\alpha (\text{ch}(t)^2 - 1) \text{sh}(t)^{n-2} dt \\ &= \int_0^\alpha \text{ch}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt - \int_0^\alpha \text{sh}(t)^{n-2} dt \\ &= \int_0^\alpha \text{ch}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt - I_{n-2} \end{aligned}$$

Pour évaluer $\int_0^\alpha \text{ch}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt = \int_0^\alpha \text{ch}(t) \text{ch}(t) \text{sh}(t)^{n-2} dt$, on procède à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{ch}(t) \Rightarrow u'(t) = \text{sh}(t) \\ v'(t) &= \text{ch}(t) \text{sh}(t)^{n-2} \Leftarrow \frac{1}{n-1} \text{sh}(t)^{n-1} \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \text{ch}(t)^2 \text{sh}(t)^{n-2} dt &= \left[\frac{1}{n-1} \text{ch}(t) \text{sh}(t)^{n-1} \right]_0^\alpha - \frac{1}{n-1} \int_0^\alpha \text{sh}(t)^n dt \\ &= \frac{1}{n-1} \text{ch}(\alpha) \underbrace{\text{sh}(\alpha)^{n-1}}_{=1} - \frac{1}{n-1} \text{ch}(0) \text{sh}(0)^{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n \\ &= \frac{1}{n-1} \text{ch}(\alpha) - \frac{1}{n-1} I_n \end{aligned}$$

Or $\text{sh}(\alpha) = 1 \Rightarrow \text{ch}(\alpha)^2 = 1 + \text{sh}(\alpha)^2 = 1 + 1 = 2$ et comme $\text{ch}(\alpha) > 0$, on a : $\text{ch}(\alpha) = \sqrt{2}$.

Il vient alors : $I_n = \frac{1}{n-1} \sqrt{2} - \frac{1}{n-1} I_n - I_{n-2}$, soit : $(n-1)I_n = \sqrt{2} - I_n - (n-1)I_{n-2}$ et,

finalement :

$$nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$$

d) Sur l'intervalle $[0; \alpha]$, on a $\text{sh}(t) \in [0; 1]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \text{sh}(t)^{n+1} \leq \text{sh}(t)^n$ et donc, en considérant les intégrales : $I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante. Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive sur $[0; \alpha]$), on en tire finalement que la suite (I_n) converge. Notons L sa limite.

D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$. D'où : $I_n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_{n-2} = \frac{\sqrt{2}}{n}$. En passant à la limite dans chaque

membre, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[I_n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_{n-2} \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n}$, c'est-à-dire $2L = 0$. D'où,

finalement : $L = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

e) On a (cf. question c) $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$. Soit $nI_n + (n-2)I_{n-2} + I_{n-2} = \sqrt{2}$.

La suite (nI_n) est donc bornée et va converger vers L' vérifiant $L' + L' + 0 = \sqrt{2}$, soit

$L' = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} n I_n) = 1$ et donc : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2} n}$.

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2} n}$$

f) Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$, la série de terme général $(-1)^n I_n$ est une série alternée. On a vu par ailleurs que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et que la suite (I_n) était décroissante. On en déduit, d'après le critère spécial des séries alternées que la série $\sum (-1)^n I_n$ est convergente.

Si on pose $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} (-1)^n I_n$ (reste d'ordre n), on sait que l'on a : $|R_n| \leq |(-1)^{n+1} I_{n+1}| = I_{n+1}$.

Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-2} près de la somme de la série $\sum (-1)^n I_n$, il suffit donc de sommer les $(-1)^n I_n$ jusqu'à ce que I_n soit inférieure à 10^{-2} .

On peut donc considérer le script suivant :

```
alpha = 0.881375
I = 2*0.5 - 1 # on initialise I à I_1
S = alpha # On initialise S à I_0
i = 1
while I >= 0.01:
    S += I*(-1)**i
    i += 1
    I = IntTrap(0,alpha,10000,i)
print(S)
```

g) A la question e), on a vu que l'on avait $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Ainsi, la série $\sum I_n$ est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à celui d'une série de Riemann divergente. Elle est donc divergente.

$\sum I_n$ diverge.

4. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N° 1034)

1. On va étudier le comportement de la fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln(1-x)}$ au voisinage de chacune des bornes en notant qu'elle n'est définie en aucune d'elles.

On a l'équivalence classique : $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$.

On en déduit immédiatement : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{\ln(1-x)} = -1$.

Par ailleurs, on a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \ln(1-x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ d'où : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x}{\ln(1-x)} = 0^-$.

La fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln(1-x)}$ admettant une limite finie en chacune des bornes de l'intégrale, on en déduit que celle-ci converge.

$$A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)} dx \text{ converge.}$$

2. D'après la question précédente, on peut travailler avec la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1-x)} & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On utilise la méthode des trapèzes dont on rappelle la formule générale :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \dots + 2f(a+(N-1)h) + f(b)] \\ &= h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(a+(N-1)h) + \frac{1}{2} f(b) \right] \end{aligned}$$

avec $h = \frac{b-a}{N}$.

Ici, $a=0$ et $b=1$: $\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{1}{2}(-1+0) = -\frac{1}{2}$.

On peut donc considérer le code suivant :

```
from math import log

def IntTrap(N):
    I = 0
    h = 1/N
    I = -0.5
    for i in range(1, N):
        x = i*h
        I += x/log(1-x)
        I *= h
    return(I)
```

Dans ce code, la variable N désigne le nombre d'intervalle dans la subdivision de l'intervalle $[0; 1]$.

Par exemple, l'appel `IntTrap(10000)`, renvoie la valeur : `-0.6931426382764816`.

3. Comme on veut 0 et $+\infty$ comme bornes, on pose le changement de variable :

« $t = -\ln(1-x)$ », c'est à dire $x = 1 - e^{-t}$. Il vient alors : $dx = e^{-t} dt$.

$$D'où : A = \int_0^1 \frac{x}{\ln(1-x)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{-t} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{-t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$$

On a bien :

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$$

4. On a : $\forall x > 0, F(x) = \int_0^x \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt$. Posons alors, pour tout x strictement positif :

$$G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt.$$

La fonction F est une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $t \mapsto \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t}$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$.

Par ailleurs, on a : $e^{-t} - 1 = 1 - t - 1 + o(t) = -t + o(t)$, d'où $\frac{e^{-t} - 1}{t} = -1 + o(1)$, soit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - 1}{t} = -1.$$

Ainsi, pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$ est convergente. Il s'agit

d'une primitive sur \mathbb{R}_+^* de la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$. Notons-la H .

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_0^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt - \int_0^x \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = H(2x) - H(x)$ et

donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G'(x) = 2 \times H'(2x) - H'(x) = 2 \times \frac{e^{-2x} - 1}{2x} - \frac{e^{-x} - 1}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = G'(x)$ et on en déduit immédiatement que les fonctions F et G ne diffèrent que d'une constante.

Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_0^x \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt = 0 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} G(x)$, cette constante est

nulle et on en déduit : $\forall x > 0, F(x) = \int_0^x \frac{e^{-2t} - e^{-t}}{t} dt = G(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$

A partir de ce qui précède, on a : $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$.

Dans l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt$ les deux bornes vont tendre vers l'infini quand x tendra vers l'infini. Le terme e^{-t} est négligeable devant 1 au voisinage de l'infini. On étudie alors

légitimement : $\left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{-1}{t} dt \right|$.

On a :

$$\left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{-1}{t} dt \right| = \left| \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \right| = \int_x^{2x} \frac{1}{te^t} dt \leq (2x-x) \times \frac{1}{xe^x} = \frac{1}{e^x}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, il vient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt - \int_x^{2x} \frac{-1}{t} dt \right) = 0$.

Or : $\int_x^{2x} \frac{-1}{t} dt = [-\ln(t)]_x^{2x} = -\ln(2x) + \ln(x) = -\ln(2)$.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \ln(2) \right) = 0$, c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t} dt = -\ln(2)$.

Finalement :

$$A = -\ln(2)$$

La valeur approchée obtenue à la question 2 est bien conforme à la valeur exacte que nous venons de calculer.

5. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1079)

A venir...

6. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1080)

A venir...

7. Centrale PSI ♠♠

(Planche RMS 2016-2017 N°1083)

A venir...

2015

1. Exercice type N° 1

1. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p_n . On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Dans la pratique, pour une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p , ce théorème permet d'approcher la probabilité $P(X = k)$ par $\frac{(np)^k}{k!} e^{-(np)}$.

Classiquement, on considère qu'une telle approximation est valable lorsque n est suffisamment grand ($n \geq 30$), p suffisamment petit ($p \leq 0,1$)

2. Voir le code proposé sur votre page.

2. Exercice type N° 2

1. Voir le code proposé sur votre page.

On a obtenu (en allant au-delà de la suggestion de l'énoncé !) :

N	$S_{u,N}$ (valeur approchée à 10^{-15})
1 000	1.070 694 154 319 582
10 000	1.070 868 194 833 175
100 000	1.070 805 652 123 411
1 000 000	1.070 795 294 441 921

La suite $(S_{u,N})_{N \in \mathbb{N}}$ semble converger, c'est-à-dire : la série $\sum u_n$ semble être convergente.

2. Il semble assez « naturel » de partir de la seconde somme du membre de droite de l'égalité :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right] &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) \times \sin 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \times (\sin 1 + \sin 2) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \times (\sin 1 + \sin 2 + \sin 3) \\
 &+ \dots \\
 &+ \left(\frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} \right) \times (\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin(N-2)) \\
 &+ \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) \times (\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin(N-1)) \\
 &= \left(\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}}_{=0} \right) \times \sin 1 \\
 &+ \left(\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}}_{=0} \right) \times \sin 2 \\
 &+ \dots \\
 &+ \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \right) \times \sin(N-1) \\
 &= \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N} \right) \times \sin k \\
 &= \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \sin k
 \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right] &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \sin k \\
 &= \frac{\sin N}{N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sin k}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^N \frac{\sin k}{k} \\
 &= S_{u,N}
 \end{aligned}$$

Le résultat est établi.

D'après ce qui précède, on a : $S_{u,N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right]$.

Etudions d'abord : $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k$.

On peut considérer $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + i \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos k$.

On a : $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k + i \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{ik} = \frac{1}{N} e^i \sum_{k=1}^N e^{i(k-1)} = \frac{1}{N} e^i \sum_{k=0}^{N-1} e^{ik} = \frac{1}{N} e^i \frac{1-e^{iN}}{1-e^i}$.

Comme $e^i \frac{1-e^{iN}}{1-e^i}$ est borné (pour tout N entier naturel $|e^{iN}|=1$ et $\left| e^i \frac{1-e^{iN}}{1-e^i} \right| \leq |1-e^{iN}| \leq 2$),

on a immédiatement : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} e^i \frac{1-e^{iN}}{1-e^i} = 0$ et donc : $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos k = 0$.

On s'intéresse maintenant à la série de terme général $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k$.

D'après le calcul qui précède, $\sum_{k=1}^n \sin k = \text{Im} \left(e^i \frac{1-e^{in}}{1-e^i} \right)$ est bornée puisque $e^i \frac{1-e^{in}}{1-e^i}$ l'est.

Ainsi, il existe un réel M positif tel que :

$$\left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k \right| = \frac{1}{n(n+1)} \left| \sum_{k=1}^n \sin k \right| \leq \frac{M}{n(n+1)} \leq \frac{M}{n^2}$$

Comme la série de terme général $\frac{M}{n^2}$ est convergente (série de Riemann convergente), on

en conclut que la série de terme général $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \sum_{k=1}^n \sin k$ est absolument convergente et donc convergente.

On déduit de ce qui précède que la suite $(S_{u,N})_{N \in \mathbb{N}}$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum u_n$ converge.

3. Voir le code proposé sur votre page.

En appelant alors la fonction Somme2 en donnant à l'argument N la valeur 100 000, on obtient :

α	$S_{v,N}$
$\frac{1}{4}$	5 958.423 812 033 241
$\frac{1}{2}$	317.227 766 017 456 53
1	0.999 999 999 998 418
2	$9.999 900 001 022 437 \times 10^{-6}$

Puis avec 1 000 000 :

α	$S_{v,N}$
----------	-----------

$\frac{1}{4}$	32 655.399 378 860 075
$\frac{1}{2}$	1 000.999 999 990 886 7
1	1.000 000 000 005 225 6
2	9.999 990 000 086 706 $\times 10^{-7}$

Il semble que la série $\sum v_n$ soit divergente pour $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{1}{4}$. Il semble qu'elle soit convergente pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

4. Calculer la valeur de la somme pour $\alpha = 1$.

Soit N un entier naturel non nul. On s'intéresse à $S_{v,2N} = \sum_{n=2}^{2N} v_n = v_2 + v_3 + \dots + v_{2N-1} + v_{2N}$.

On a :

$$\begin{aligned}
 S_{v,2N} &= v_2 + v_3 + \dots + v_{2N-1} + v_{2N} \\
 &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots - \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N-1} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2N-1}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2N}\right) \\
 &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2N-2} + \frac{1}{2N}\right) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} \right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}\right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N} \right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{N} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{N-1}{N}} + \frac{1}{1+\frac{N}{N}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{N} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \frac{1}{1+\frac{1}{N}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{N-1}{N}} + \frac{1}{1+\frac{N}{N}} \right) \text{ est une somme de Riemann associée à la}$$

fonction inverse avec $a = 1$ et $b = 2$. On a donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{N} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{N}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{N}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{N-1}{N}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{N}} \right) \right\} = \int_1^2 \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Finalemment : $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{v,2N} = \sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2} + \ln 2 .$

3. Exercice type N° 3

Deux personnes, A et B, ont rendez-vous en un lieu donné entre 20h et 21h. Chacune décide aléatoirement et indépendamment de l'autre de son instant d'arrivée et aucune n'attendra l'autre plus d'un quart d'heure. On note T_A et T_B les variables aléatoires correspondant aux instants d'arrivée des personnes A et B. On suppose que T_A et T_B suivent des lois uniformes sur l'intervalle $[20; 21]$.

On s'intéresse à la probabilité que les deux personnes se rencontrent. On note p cette probabilité.

- Ecrire une fonction Python permettant de simuler des séries d'arrivées des deux personnes A et B et d'estimer la probabilité p .
- Calculer la valeur exacte de p à l'aide d'une approche graphique.

4. Exercice type N° 4

On considère la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, u_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

1. Ecrire une fonction Python recevant en argument un entier naturel N supérieur ou égal à 2 et renvoyant u_N .
2. A l'aide de votre programme, conjecturer la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ puis prouver votre conjecture.
3. Etudier la nature de la série $\sum u_n$.

5. Exercice type N° 5

Ce sujet comporte deux parties indépendantes.

Partie N°1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos^2(t) + x^2 \sin^2(t)) dt$$

Préciser le domaine de définition de f .

Partie N°2

Ecrire une fonction Python `fCalc` recevant en arguments un réel x et un entier naturel non nul N et renvoyant une valeur approchée de $f(x)$ obtenue grâce à l'approximation de l'intégrale par une somme de Riemann.

On testera la fonction `fCalc` avec $x = 1$ et $x = 10^{-5}$ (pour ce deuxième test, on prendra $N = 10^6$).

6. Centrale 2015 Maths2 (PC)

Posons :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}}$$

1. Etude de f

- a) Déterminer le domaine de définition I de f .
- b) Calculer des valeurs approchées de $f(x)$ pour $x \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$.
- c) Tracer le graphe de f sur I .
- d) La fonction f est-elle continue sur I ? De classe \mathcal{C}^2 ?

2. Etude de g

- a) Déterminer le domaine de définition J de g .
- b) Calculer des valeurs approchées de $\frac{f(k)}{g(k)}$ pour $k \in \llbracket 1; 10 \rrbracket$. Emettre une conjecture.
- c) Démontrer la conjecture émise à la question précédente.