

Un élève de CPGE s'intéresse aux matrices triangulaires réelles (franchement, il a bien raison ! ☺).

Programmant en langage Python mais ne disposant pas de la bibliothèque `numpy` sur son ordinateur (que n'utilise-t-il `Pyzo` ???), il décide de représenter une telle matrice sous forme d'une liste (celles des lignes de la matrice considérée) mais en ne stockant pas les « 0 » situés au-dessus de la diagonale (pour les triangulaires inférieures) ou sous la diagonale (pour les triangulaires supérieures).

Ainsi, il représente les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 13 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

par les listes :

$$LA = [[2], [-1, 1], [3, -5, 13]]$$

$$LB = [[4, -7, 20, 0], [0, -3, 5], [2, 1], [10]]$$

Dans la suite, toutes les matrices triangulaires seront représentées de la sorte.

1. Ecrire une fonction Python `TriMat_test` qui reçoit une matrice triangulaire `T` et renvoie la chaîne de caractère `Tinf` ou `Tsup` selon que la matrice `T` est triangulaire inférieure ou supérieure.
2. Ecrire une fonction Python `TriMat_det` qui reçoit une matrice triangulaire `T` et renvoie son déterminant.
3. Ecrire une fonction Python `TriMat_transpose` qui reçoit une matrice triangulaire `T` et renvoie sa transposée.
4. Ecrire une fonction Python `TriMat_inverse` qui reçoit une matrice triangulaire `T` et :
  - teste l'inversibilité de `T`.
  - renvoie le booléen `True` et la matrice  $T^{-1}$  ou seulement le booléen `False` suivant que `T` est ou non inversible.

Evaluer la complexité (nombre d'opérations) du calcul de  $T^{-1}$ .

5. **Bonus.** L'élève a finalement décidé de créer une sous-classe `TriMat` de la classe `list` pour manipuler ses matrices triangulaires.

Reprendre la question 2 en récrivant `TriMat_det` en tant que méthode de la sous-classe `TriMat`.