

# Centrale-Supelec

## Oral Maths 2 Sujet type N°1 Corrigé

1. Nous devons tracer plusieurs courbes paramétrées (6 puisque  $n$  prend les valeurs entières de 2 à 7).

On commencera par générer une table  $T$  contenant les valeurs du paramètre  $t$ . J'ai choisi de faire varier  $t$  de 0 à  $2\pi$  avec un pas de 0,01 (la valeur  $2\pi$  ne sera donc pas atteinte ☺).

On entre alors dans la boucle principale qui est une boucle `for` dont le compteur,  $n$ , va donc prendre les valeurs 2, 3, 4, 5, 6 et 7.

A chaque exécution de cette boucle, on construit deux listes :

- La liste  $X$  qui recevra les valeurs de  $x_n(t)$ .
- La liste  $Y$  qui recevra les valeurs de  $y_n(t)$ .

On prépare l'affichage à l'aide de la fonction `plot` que l'on appelle avec le paramètre `label` pour pouvoir identifier les courbes (le label indiquera simplement la valeur de  $n$  à côté d'un trait de même couleur que la courbe correspondante).

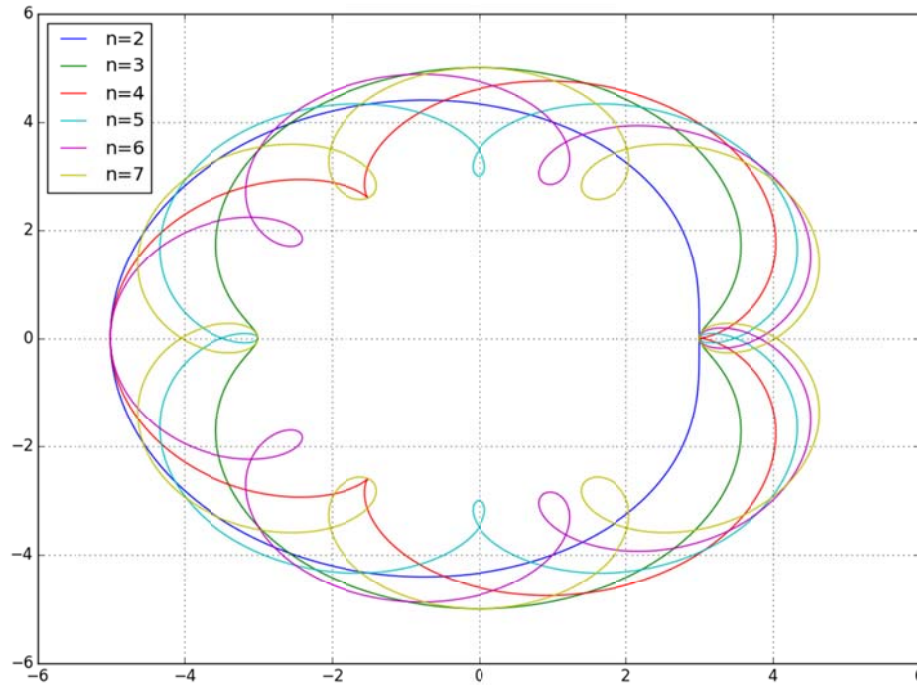
Après l'exécution de la boucle, on fait appel à la fonction `legend` pour le positionnement des labels, à la fonction `grid` pour obtenir une grille permettant de mieux se repérer sur le tracé et à la fonction `show` pour générer l'affichage proprement dit.

On peut donc proposer le code suivant :

```
from math import cos, sin
from numpy import array, arange, pi
import matplotlib.pyplot as plt

plt.clf()
T = arange(0, 2*pi, 0.01)
for n in range(2, 8):
    X = [4*cos(t) - cos(n*t) for t in T]
    Y = [4*sin(t) - sin(n*t) for t in T]
    plt.plot(X, Y, label='n='+str(n))
plt.legend(loc = 'upper left')
plt.grid()
plt.show()
```

On obtient alors la figure suivante :



Remarque : pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , on obtient les courbes de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x_0(t) = 4 \cos(t) - 1 \\ y_0(t) = 4 \sin(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1(t) = 3 \cos(t) \\ y_1(t) = 3 \sin(t) \end{cases}$$

On obtient dans les deux cas un cercle :  $\mathcal{E}_0$  est le cercle de centre  $\Omega_0(-1; 0)$  et de rayon 4 tandis que  $\mathcal{E}_1$  est le cercle de centre  $\Omega_0 = O$  et de rayon 3.

2. D'après les courbes obtenues, il semblerait qu'il faille distinguer les symétries présentes suivant la parité de  $n$  :

- Si  $n$  est pair, la courbe  $\mathcal{E}_n$  semble n'admettre qu'un seul axe de symétrie : l'axe des abscisses.
- Si  $n$  est impair, la courbe  $\mathcal{E}_n$  semble admettre deux axes de symétrie : l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Pour tout réel  $t$  dans  $[0; \pi]$ , on a :

$$\begin{aligned}x_n(2\pi - t) &= 4 \cos(2\pi - t) - \cos(n(2\pi - t)) \\ &= 4 \cos(-t) - \cos(2\pi n - nt) \\ &= 4 \cos(t) - \cos(-nt) \\ &= 4 \cos(t) - \cos(nt) \\ &= x_n(t)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}y_n(2\pi - t) &= 4 \sin(2\pi - t) - \sin(n(2\pi - t)) \\ &= 4 \sin(-t) - \sin(n \times 2\pi - n \times t) \\ &= -4 \sin(t) - \sin(-nt) \\ &= -4 \sin(t) + \sin(nt) \\ &= -y_n(t)\end{aligned}$$

De ce qui précède, on déduit que la courbe paramétrée  $\mathcal{E}_n$  est formée de deux branches symétriques par rapport à l'axe des abscisses : l'une correspondant à  $t$  prenant ses valeurs dans l'intervalle  $[0; \pi]$  et l'autre correspondant à  $t$  prenant ses valeurs dans  $[\pi; 2\pi]$ .

La courbe  $\mathcal{E}_n$  est bien symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Pour ce qui est d'une éventuelle seconde symétrie (cette fois-ci par rapport à l'axe des ordonnées), nous pouvons nous limiter à  $t \in [0; \pi]$  d'après le résultat précédent.

On a cette fois :

$$\begin{aligned}x_n(\pi - t) &= 4 \cos(\pi - t) - \cos(n(\pi - t)) \\ &= -4 \cos(t) - \cos(n\pi - nt)\end{aligned}$$

Si  $n$  est impair ( $n = 2p + 1$ ), il vient alors :

$$\begin{aligned}x_n(\pi - t) &= -4 \cos(t) - \cos(n\pi - nt) \\ &= -4 \cos(t) - \cos((2p + 1)\pi - nt) \\ &= -4 \cos(t) - \cos(2p\pi + \pi - nt) \\ &= -4 \cos(t) - \cos(\pi - nt) \\ &= -4 \cos(t) + \cos(nt) \\ &= -x_n(t)\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
 y_n(\pi - t) &= 4 \sin(\pi - t) - \sin(n(\pi - t)) \\
 &= 4 \sin(t) - \sin(n \times 2\pi - n \times t) \\
 &= 4 \sin(t) - \sin((2p + 1)\pi - nt) \\
 &= 4 \sin(t) - \sin(2p\pi + \pi - nt) \\
 &= 4 \sin(t) - \sin(\pi - nt) \\
 &= 4 \sin(t) - \sin(nt) \\
 &= y_n(t)
 \end{aligned}$$

De ce qui précède, on déduit que, pour  $n$  impair, la branche de la courbe paramétrée  $\mathcal{E}_n$  correspondant à  $t \in [0; \pi]$  est elle-même formée de deux branches symétriques par rapport à l'axe des ordonnées : l'une correspondant à  $t$  prenant ses valeurs dans l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  et l'autre correspondant à  $t$  prenant ses valeurs dans  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .  
 Pour  $n$  impair, la courbe  $\mathcal{E}_n$  est bien symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. On cherche les (éventuelles) valeurs de  $n$  pour lesquelles le système :  $\begin{cases} x_n'(t) = 0 \\ y_n'(t) = 0 \end{cases}$  admet au moins une solution. D'après la question précédente, nous pouvons limiter notre recherche des points stationnaires aux valeurs de  $t$  dans  $[0; \pi]$ .

On a immédiatement :

$$\begin{cases} x_n'(t) = 0 \\ y_n'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \sin(t) + n \sin(nt) = 0 \\ 4 \cos(t) - n \cos(nt) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin(t) = n \sin(nt) \\ 4 \cos(t) = n \cos(nt) \end{cases}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 4 \sin(t) = n \sin(nt) \\ 4 \cos(t) = n \cos(nt) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 4^2 \sin^2(t) = n^2 \sin^2(nt) \\ 4^2 \cos^2(t) = n^2 \cos^2(nt) \end{cases} \\
 &\Rightarrow 4^2 (\sin^2(t) + \cos^2(t)) = n^2 (\sin^2(nt) + \cos^2(nt)) \Leftrightarrow 4^2 = n^2
 \end{aligned}$$

Comme  $n$  est un entier naturel, on en tire finalement :  $n = 4$ .

Ainsi, seule la courbe  $\mathcal{E}_4$  peut admettre des points non réguliers.

Supposons donc que l'on ait  $n = 4$ .

On a dans ce cas :

$$\begin{cases} x_n'(t) = 0 \\ y_n'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin(t) = 4 \sin(4t) \\ 4 \cos(t) = 4 \cos(4t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(t) = \sin(4t) \\ \cos(t) = \cos(4t) \end{cases}$$

La solution  $t = 0$  est immédiate. En revanche,  $t = \pi$  n'est pas solution (la deuxième égalité n'est pas vérifiée).

On cherche d'autres solutions dans  $]0; \pi[$ . Sur cet intervalle, on a :

$$\begin{cases} \sin(t) = \sin(4t) \\ \cos(t) = \cos(4t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t = t(2\pi) \\ t \in ]0; \pi[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ t \in ]0; \pi[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ t \in ]0; \pi[ \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3}$$

Pour  $t = \frac{2\pi}{3}$ , on aura donc un point non régulier. Du fait de la symétrie de la courbe, il y

en aura également un pour  $t = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ .

Enfin, la courbe  $\mathcal{E}_n$  admet des points non réguliers pour  $n = 4$ .

$\mathcal{E}_4$  admet au total trois points non réguliers.

Il correspondent aux temps de passage suivants :  $t = 0$ ,  $t = \frac{2\pi}{3}$  et  $t = \frac{4\pi}{3}$ .

On considère donc la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x_4(t) = 4 \cos(t) - \cos(4t) \\ y_4(t) = 4 \sin(t) - \sin(4t) \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

Etude au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} x_4(t) &= 4 \cos(t) - \cos(4t) \\ &= 4 \left( 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3) \right) - \left( 1 - \frac{(4t)^2}{2} + o(t^3) \right) \\ &= 3 + (-2 + 8)t^2 + o(t^3) \\ &= 3 + 6t^2 + o(t^3) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}y_4(t) &= 4 \sin(t) - \sin(4t) \\ &= 4 \left( t - \frac{t^3}{6} + o(t^4) \right) - \left( 4t - \frac{(4t)^3}{6} + o(t^4) \right) \\ &= \left( -\frac{2}{3} + \frac{32}{3} \right) t^3 + o(t^4) \\ &= 10t^3 + o(t^4)\end{aligned}$$

Il vient donc :

- Le point correspondant à  $t = 0$  est le point  $A_0(3; 0)$ .
- En ce point, la tangente est dirigée par le vecteur  $\vec{u}_0(6; 0)$  qui est colinéaire au vecteur  $\vec{i}$ . La tangente est donc parallèle à l'axe des abscisses. Comme le point  $A_0$  appartient à cet axe, on en déduit finalement que la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_4$  au point  $A_0$  de paramètre  $t = 0$  est l'axe des abscisses.
- Comme le premier vecteur dérivé non colinéaire au vecteur  $\vec{u}_0$  est le vecteur  $\vec{v}_0(0; 10)$  (ses coordonnées sont les coefficients de «  $t^3$  » dans les développements limités), on en déduit que le point  $A_0$  est un point de rebroussement de première espèce.

Etude au voisinage de  $\frac{2\pi}{3}$ .

Cette fois, on pose classiquement  $t = \frac{2\pi}{3} + h$  pour se ramener à des développements limités à l'origine (cf. page suivante).

$$\begin{aligned}
x_4(t) &= x_4\left(\frac{2\pi}{3} + h\right) = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + h\right) - \cos\left(4\left(\frac{2\pi}{3} + h\right)\right) \\
&= 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(h) - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(h)\right) - \cos\left(\frac{8\pi}{3} + 4h\right) \\
&= 4\left(-\frac{1}{2}\cos(h) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(h)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 4h\right) \\
&= -2\cos(h) - 2\sqrt{3}\sin(h) - \left(-\frac{1}{2}\cos(4h) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(4h)\right) \\
&= -2\cos(h) - 2\sqrt{3}\sin(h) + \frac{1}{2}\cos(4h) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(4h) \\
&= -2\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) - 2\sqrt{3}\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(4h)^2}{2} + o(h^3)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(4h - \frac{(4h)^3}{6} + o(h^3)\right) \\
&= \left(-2 + \frac{1}{2}\right) + (-2\sqrt{3} + 2\sqrt{3})h + (1-4)h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{16\sqrt{3}}{3}\right)h^3 + o(h^3) \\
&= -\frac{3}{2} - 3h^2 - 5\sqrt{3}h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
y_4(t) &= y_4\left(\frac{2\pi}{3} + h\right) = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + h\right) - \sin\left(4\left(\frac{2\pi}{3} + h\right)\right) \\
&= 4\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos(h) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\sin(h)\right) - \sin\left(\frac{8\pi}{3} + 4h\right) \\
&= 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(h) + \frac{1}{2}\sin(h)\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 4h\right) \\
&= 2\sqrt{3}\cos(h) + 2\sin(h) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(4h) + \frac{1}{2}\sin(4h)\right) \\
&= 2\sqrt{3}\cos(h) + 2\sin(h) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(4h) - \frac{1}{2}\sin(4h) \\
&= 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) + 2\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) \\
&\quad - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{(4h)^2}{2} + o(h^3)\right) - \frac{1}{2}\left(4h - \frac{(4h)^3}{6} + o(h^3)\right) \\
&= \left(2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (2-2)h + (-\sqrt{3} + 4\sqrt{3})h^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{16}{3}\right)h^3 + o(h^3) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3}h^2 + 5h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

On a finalement :

$$\begin{cases} x_4(t) = -\frac{3}{2} - 3h^2 - 5\sqrt{3}h^3 + o(h^3) = -\frac{3}{2} - 3\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)^2 - 5\sqrt{3}\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)^3\right) \\ y_4(t) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3}h^2 + 5h^3 + o(h^3) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3}\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)^2 + 5\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)^3\right) \end{cases}$$

Il vient donc :

- Le point correspondant à  $t = \frac{2\pi}{3}$  est le point  $A_{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ .
- En ce point, la tangente est dirigée par le vecteur  $\vec{u}_{\frac{2\pi}{3}}(-3; 3\sqrt{3})$  qui est colinéaire au vecteur de coordonnées  $(-1; \sqrt{3})$ .
- Comme le premier vecteur dérivé non colinéaire au vecteur  $\vec{u}_0$  est le vecteur  $\vec{v}_0(-5\sqrt{3}; 5)$  (ses coordonnées sont les coefficients de «  $\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)^3$  » dans les développements limités), on en déduit que le point  $A_{\frac{2\pi}{3}}$  est un point de rebroussement de première espèce.

Par symétrie de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, on conclut immédiatement que le point  $A_{\frac{4\pi}{3}}$  est également un point de rebroussement de première espèce.

4. On a classiquement :  $\ell_n = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x_n'(t))^2 + (y_n'(t))^2} dt$ .

La symétrie de la courbe par rapport à l'axe des abscisses nous permet d'écrire

immédiatement :  $\ell_n = 2 \int_0^\pi \sqrt{(x_n'(t))^2 + (y_n'(t))^2} dt$ .

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} (x_n'(t))^2 + (y_n'(t))^2 &= (-4\sin(t) + n\sin(nt))^2 + (4\cos(t) - n\cos(nt))^2 \\ &= 16 + n^2 - 8n(\sin(t)\sin(nt) + \cos(t)\cos(nt)) \\ &= 16 + n^2 - 8n\cos((n-1)t) \end{aligned}$$

D'où :

$$\ell_n = 2 \int_0^\pi \sqrt{16 + n^2 - 8n\cos((n-1)t)} dt$$

Avant de pouvoir représenter graphiquement les points  $M_n(n; \ell_n)$ , nous allons devoir calculer des valeurs approchées des  $\ell_n$ . Pour ce faire, nous approcherons classiquement la valeur de l'intégrale par une somme de Riemann. Pour structurer quelque peu notre script, nous introduisons :

- Une fonction  $f$  qui permet le calcul de  $\sqrt{16+n^2-8n\cos((n-1)t)}$ . Elle reçoit comme seul argument (mais on aurait pu procéder différemment) le réel  $t$ . La variable  $n$  est définie comme globale.
- Une fonction  $\text{SRiemann}$  qui reçoit classiquement comme arguments : les réels  $a$  et  $b$ , bornes inférieure et supérieure de l'intégrale à approcher, et  $N$ , le nombre d'intervalles de la subdivision de  $[a; b]$ . Travaillant avec un pas  $h$  constant, on aura évidemment :  $h = \frac{b-a}{N}$  et on calculera  $f(a+kh)$  avec  $k$  entier compris entre 0 et  $n-1$  (vous pouvez choisir de faire varier  $k$  entre 1 et  $n$  si vous préférez voire même calculer ces deux sommes de Riemann et en considérer la moyenne arithmétique...). Dans le code ci-dessous, j'ai choisi  $N = 200$  qui est une valeur raisonnable pour obtenir de bonnes approximations des intégrales.

In fine, on peut proposer le code suivant :

```

from numpy import pi
import matplotlib.pyplot as plt
global n

def f(t):
    return((16 + n**2 - 8*n*cos((n-1)*t))**0.5)

def SRiemann(a,b,N):
    S = 0
    h = (b - a)/N
    for k in range(N):
        S += f(a + k*h)
    S *= h
    return(S)

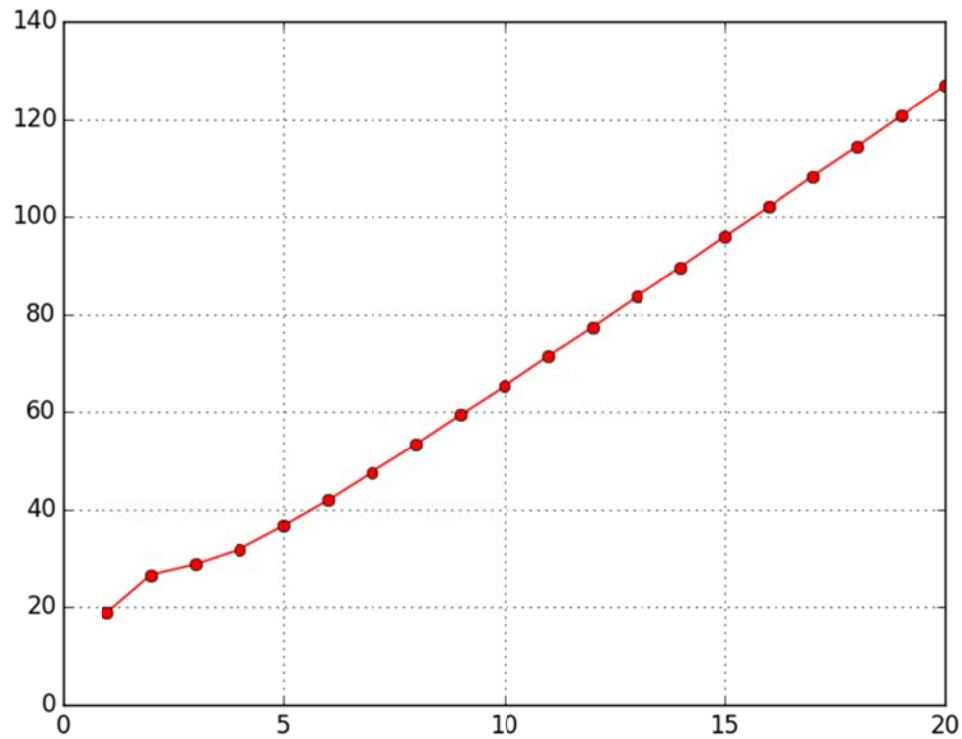
# Génération des listes X et Y des abscisses et
# ordonnées des points M(n)
X = [n for n in range(1,21)]

Y = []
for n in range(1,21):
    Y += [2*SRiemann(0,pi,200)]

# Affichage graphique
plt.clf()
plt.plot(X,Y,color='r',marker='o')
plt.grid()
plt.show()

```

On obtient alors la figure suivante :



5. A la question précédente, on a obtenu  $(x_n'(t))^2 + (y_n'(t))^2 = 16 + n^2 - 8n \cos((n-1)t)$ . On en tire immédiatement l'encadrement :

$$16 + n^2 - 8n \leq (x_n'(t))^2 + (y_n'(t))^2 \leq 16 + n^2 + 8n$$

C'est-à-dire, pour  $n \geq 4$  :

$$n - 4 \leq \sqrt{(x_n'(t))^2 + (y_n'(t))^2} \leq n + 4$$

D'où :

$$2 \int_0^\pi (n-4) dt \leq \ell_n \leq 2 \int_0^\pi (n+4) dt$$

Soit :

$$2\pi(n-4) \leq \ell_n \leq 2\pi(n+4)$$

Puis :

$$1 - \frac{4}{n} \leq \frac{\ell_n}{2\pi n} \leq 1 + \frac{4}{n}$$

On en tire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_n}{2\pi n} = 1$  et, finalement :

$$\boxed{\ell_n \underset{+\infty}{\sim} 2\pi n}$$