Toute calculatrice autorisée.
Le sujet comporte un total de 3 exercices.

EXERCICE 1. Décollage d'un engin spatial.

On s'intéresse dans cet exercice au décollage d'un engin spatial depuis le sol terrestre.

On modélise la situation comme suit :

- La trajectoire de l'engin est supposée verticale et il est repéré (variable *z*) le long d'un axe vertical passant par le centre de la terre, pris comme origine ($z = 0$), et le centre du pas de tir ($z = R_T > 0$ où R_T désigne le rayon de la Terre assimilée à une sphère).
- L'origine des temps est l'instant du décollage. On a donc : $z(0) = R_T$ et $\left(\frac{dz}{dt}\right)(0) = 0$.
- La masse de l'engin est notée *m* et est une fonction du temps.
- La vitesse d'éjection des gaz par rapport à l'engin est supposée constante et notée *u* ($u > 0$).
- On néglige les frottements.

Avec les hypothèses précédentes en considérant le système fermé {fusée, gaz} entre les instants *t* et $t + dt$, on effectue un bilan de la variation de la quantité de mouvement globale et le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dm}{dt}u = -G\frac{mM_T}{z^2} \qquad (\mathrm{E})$$

où *G* désigne la constante universelle de la gravitation et M_T la masse de la Terre.

1. On s'intéresse en fait à la variable *h* correspondant à l'altitude de l'engin (i.e. sa distance au sol). Vérifier que la variable *h* satisfait l'équation différentielle (E') suivante et préciser les conditions initiales (à $t = 0$) :

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -\frac{GM_T}{(R_T + h)^2} - \frac{1}{m}\frac{dm}{dt}u \qquad (\mathrm{E}')$$

2. On cherche à résoudre l'équation différentielle (E') avec les conditions initiales précisées à la question précédente à l'aide d'un schéma d'Euler explicite sur un intervalle de temps $[0\,;t_f]$. On utilise un pas de temps constant Δt. Pour la masse *m* et la dérivée $\frac{dm}{dt}$, on dispose d'une fonction Python `FM` qui reçoit comme argument un flottant correspondant au temps *t* et renvoie un tuple de deux éléments correspondant respectivement à $m(t)$ et $\left(\frac{dm}{dt}\right)(t)$. Les variables `G`, `MT`, `RT` et `u` correspondant respectivement à la constante *G*, à la masse M_T, au rayon R_T et à la vitesse d'éjection *u* seront déclarées globales.

3. Ecrire une fonction Python `D2H` qui reçoit comme arguments une variable `t` correspondant à un instant *t*, une variable `h` correspondant à l'altitude de l'engin à l'instant *t* et une variable `v` correspondant à sa vitesse (dérivée de *h* par rapport au temps) à ce même instant. La fonction `D2H` renverra la dérivée seconde de *h* par rapport au temps à l'instant *t*.

```
def D2H(t,h,v):
    …
```

4. Ecrire une fonction `EULER_decollage` qui permet de résoudre numériquement l'équation différentielle (E') sur un intervalle de temps $[t_i\,;t_f]$ ($t_i < t_f$). Elle reçoit comme arguments :

   - Une variable `ti` correspondant au temps initial t_i.
   - Une variable `tf` correspondant au temps final t_f.
   - Une variable `pas` correspondant au pas de temps Δt.
   - Une variable `h0` correspondant à l'altitude initiale.
   - Une variable `v0` correspondant à la vitesse initiale.

   La fonction construira trois listes `Lt`, `Lh` et `Lv` contenant les valeurs des instants, de l'altitude et de la vitesse de l'engin aux instants 0, *pas*, $2\times pas$, $3\times pas$, …
   La fonction affichera un graphique donnant l'altitude de l'engin en fonction du temps (le script contient l'instruction `import matplotlib.pyplot as plt`).

```
def EULER_décollage(ti,tf,pas,h0,v0):
    …
```

   Par exemple, si l'on prend la seconde comme unité de temps et si l'on souhaite obtenir l'altitude atteinte par l'engin au bout de 2 minutes avec un pas de temps égal à une seconde, on appellera la fonction `EULER_decollage` dans le script comme suit :

```
EULER_décollage(0,120,1,0,0)
```

5. Le décollage se divise en fait en quatre phases principales correspondant aux intervalles de temps $I_1=[0\,;t_1]$, $I_2=[t_1\,;t_2]$, $I_3=[t_2\,;t_3]$ et $I_4=[t_3\,;t_4]$. On dispose ainsi de quatre fonctions Python `FM1`, `FM2`, `FM3` et `FM4` donnant à un instant *t* quelconque, dans l'un de ces intervalles, la masse $m(t)$ et la valeur prise par sa dérivée $\left(\frac{dm}{dt}\right)(t)$. On suppose par ailleurs que les temps t_1, t_2, t_3 et t_4 sont fournis dans une liste `LT`.

   Comment modifier le script et la fonction `EULER_decollage` pour tenir compte de ces quatre phases et résoudre l'équation différentielle (E') sur l'intervalle de temps $[0\,;t_4]$?

EXERCICE 2. Les courbes de BEZIER.

Une courbe de Bézier à $N+1$ ($N\geq 1$) points de contrôle $P_0, P_1, P_2, ..., P_N$ est une courbe paramétrée d'extrémités les points P_0 et P_N définie par :

$$\left\{P(t)=\sum_{i=0}^{N}B_i^N(t).P_i,\ t\in[0\,;1]\right\}$$

où les B_i^N sont les polynômes de Bernstein définis par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ B_i^N(t)=\binom{N}{i}\times t^i\times(1-t)^{N-i}$$

Remarque importante : l'écriture B_i^N ne désigne en rien une puissance !

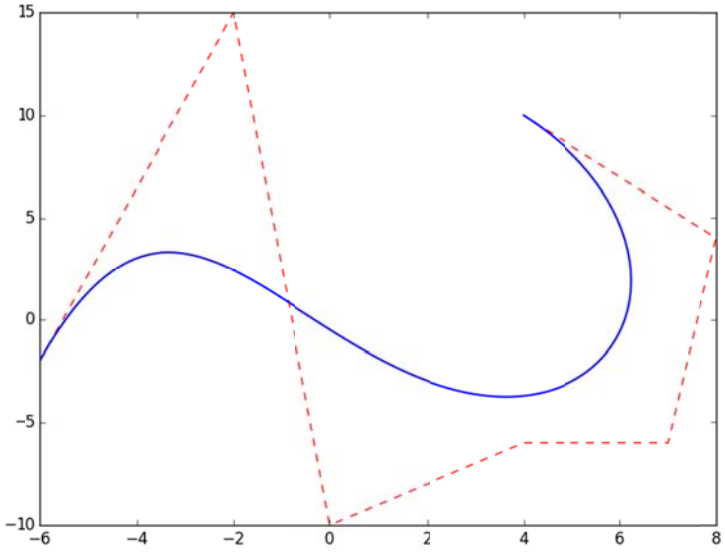
Par exemple, pour $N=6$ et en considérant les points de contrôle suivants :

$$P_0\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}, P_1\begin{pmatrix}-2\\15\end{pmatrix}, P_2\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}, P_3\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}, P_4\begin{pmatrix}7\\-6\end{pmatrix}, P_5\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} \text{ et } P_6\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$$

on obtient la courbe de Bézier correspondant aux points $P(t)\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ ($t\in[0\,;1]$) avec :

$$\begin{cases}x(t)=\sum_{i=0}^{6}B_i^N(t)\times x_i=-6B_0^N(t)-2B_1^N(t)+4B_3^N(t)+7B_4^N(t)+8B_5^N(t)+4B_6^N(t)\\ y(t)=\sum_{i=0}^{6}B_i^N(t)\times y_i=-2B_0^N(t)+15B_1^N(t)-10B_2^N(t)-6B_3^N(t)-6B_4^N(t)+4B_5^N(t)+10B_6^N(t)\end{cases}$$

Graphiquement (la ligne en pointillés rouges est la ligne polygonale des points de contrôle) :



Partie A : évaluation directe des polynômes de Bernstein

Dans cette partie, on se donne un réel *t* dans l'intervalle $[0;1]$ et un entier naturel *i* dans $[\![0;N]\!]$. On cherche à évaluer le nombre $C(N,i)$ de multiplications et de divisions requises par le calcul de $B_i^N(t)=\binom{N}{i}\times t^i\times(1-t)^{N-i}$.

1. On a : $B_i^N(t)=\dfrac{N!}{i!\times(N-i)!}\times t^i\times(1-t)^{N-i}$.

   Dans cette question, on suppose que l'on calcule $B_i^N(t)$ en calculant chacune des trois factorielles apparaissant dans le coefficient binomial.

   Calculer $C(N,i)$.

2. On a, pour $i\neq 0$:

$$B_i^N(t)=\frac{N\times(N-1)\times(N-2)\times\ldots\times(N-i+1)}{i\times(i-1)\times(i-2)\times\ldots\times2\times1}\times t^i\times(1-t)^{N-i}=\frac{\prod_{k=0}^{i-1}(N-k)}{\prod_{k=0}^{i-1}(k+1)}\times t^i\times(1-t)^{N-i}$$

   On a donc calculé $\binom{N}{i}$ en ayant simplifié le rapport $\dfrac{N!}{(N-i)!}$.

   a. Calculer $C(N,i)$.

On a aussi $\binom{N}{i} = \binom{N}{N-i}$.

b. Calculer $C(N, N-i)$.

c. Ecrire une fonction Python `Bernstein_base` recevant en argument deux entiers *N* et *i* et un réel *t* dans $[0;1]$ et renvoyant $B_i^N(t)$ en effectuant un minimum de multiplications.

3. On a, pour *i* non nul : $\binom{N}{i} = \frac{N}{i} \times \binom{N-1}{i-1}$.

On propose le code récursif suivant pour le calcul de $\binom{N}{i}$:

```
def binomial(n,i):
    if i == 0 or i == n:
        return 1
    else:
        return((n / i) * binomial(n - 1,i - 1))
```

Ce code peut conduire à des résultats erronés. Pouvez dire pourquoi ?
En ne modifiant que le deuxième `return`, proposer un code correct.

Partie B : évaluation récursive des polynômes de Bernstein

Les polynômes de Bernstein peuvent être calculés selon la définition récursive suivante :

$B_0^1(t) = 1-t$, $B_1^1(t) = t$ et pour $N > 1$:

$$B_i^N(t) = \begin{cases} (1-t) \times B_i^{N-1}(t) & \text{si } i = 0 \\ (1-t) \times B_i^{N-1}(t) + t \times B_{i-1}^{N-1}(t) & \text{si } i \in [\![1; N-1]\!] \\ t \times B_{i-1}^{N-1}(t) & \text{si } i = m \end{cases}$$

4. Ecrire une fonction récursive `Bernstein_rec` qui calculera $B_i^N(t)$ et recevra en argument deux entiers *N* et *i* (dans $[\![0; N]\!]$) et un réel *t* (dans $[0;1]$). Les appartenances mentionnées ne seront pas testées par la fonction.

Partie C : l'algorithme de Casteljau

L'algorithme de Casteljau est un algorithme visant à déterminer, pour *t* fixé dans $[0;1]$, les coordonnées $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ d'un point $P(t)$ en tirant parti de la définition récursive précédente. Le principe en est le suivant :

- On note $P_0^0, P_1^0, P_2^0, ..., P_N^0$ la liste initiale des points de contrôle. Cette liste comporte $N+1$ points.
- A partir de la liste précédente, on construit la liste des *N* barycentres $P_i^1 = \{(P_i^0, t), (P_{i+1}^0, 1-t)\}$ avec $i \in [\![0\,;N-1]\!]$. On a ainsi : $P_i^1 = t.P_i^0 + (1-t).P_{i+1}^0$, c'est-à-dire, en notant $P_i^1\begin{pmatrix} x_i^1(t) \\ y_i^1(t) \end{pmatrix}$: $\begin{cases} x_i^1(t) = t \times x_i^0(t) + (1-t) \times x_{i+1}^0(t) \\ y_i^1(t) = t \times y_i^0(t) + (1-t) \times y_{i+1}^0(t) \end{cases}$.
- On recommence l'étape précédente jusqu'à obtenir le point P_0^N qui correspond au point $P(t)$ de la courbe de Bézier ayant les points $P_0^0, P_1^0, P_2^0, ..., P_N^0$ pour points de contrôle.

5. Pourquoi l'algorithme précédent se termine-t-il ?
6. Ecrire une fonction récursive `PointBezier_rec` qui renverra le point $P(t) = P_0^N$ et recevra en argument une liste de points et un réel *t* (dans $[0;1]$). Un point sera représenté par une liste de deux éléments correspondant à ses coordonnées. De fait, une liste de points sera une liste de listes. Avec l'exemple fourni en début d'exercice, on appellera initialement la fonction avec la liste *PC* :

```
[[-6,-2],[-2,15],[0,-10],[4,-6],[7,-6],[8,4],[4,10]]
```

7. En supposant disponible la fonction `PointBezier_rec`, écrire une fonction `Bezier_Casteljau` qui recevra comme arguments une liste *PC* de points et un entier *NP* et tracera *NP* points (correspondant à $NP+1$ valeurs équiréparties de *t* dans $[0;1]$) de la courbe de Bézier ayant pour points de contrôle les points de *PC*.

EXERCICE 3. Complexité moyenne du tri rapide.

Partie A : calculs préliminaires

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Soit *X* et *Y* deux variables aléatoires définies sur cet espace et telles que :

- $X(\Omega) \subset [\![0\,;N]\!]$ où *N* désigne un entier naturel.
- $Y(\Omega) \subset [\![0\,;n-1]\!]$ et $\forall j \in [\![0\,;n-1]\!], P(Y=j) = \dfrac{1}{n}$.

Pour tout entier *j* dans $[\![0\,;n-1]\!]$, on désigne par $E(X\,|Y=j)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire *X* pour la probabilité conditionnelle $P_{(Y=j)}$. $E(X\,|Y=j)$ est donc l'espérance de *X* dans l'espace probabilisé $\left(\Omega,\mathscr{A},P_{(Y=j)}\right)$.

1. Calculer $E(Y)$.
2. Montrer que $E(X)=\dfrac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}E(X\,|Y=j)$.

Partie B : complexité moyenne du tri rapide

Soit à trier une liste $L=[l_1,\ l_2,\ l_3,...,l_n]$ uniformément choisie dans l'ensemble des $n!$ permutations de l'ensemble $[\![1\,;n]\!]$.
Notons C_n la variable aléatoire correspondant au nombre de comparaisons requises pour trier cette liste à l'aide de l'algorithme du tri rapide.
On cherche $E(C_n)$.

Pour une liste donnée, on utilise comme pivot le premier élément de cette liste.
On note G_n (respectivement D_n) la longueur de la liste de gauche L_n^G (respectivement droite L_n^D) obtenue à l'issue de la première étape du tri de la liste *L* et on pose $R_n=C_n-(n-1)$ correspondant aux nombres de comparaisons à effectuer après la première étape.

3. Déterminer la loi de G_n.
4. Montrer que $\forall n\geq 2,\ \forall j\in[\![0\,;n-1]\!],\ E(R_n\,|G_n=j)=E(C_j+C_{n-j-1})$.
5. Montrer que l'on a : $\forall n\geq 2,\ E(C_n)=n-1+\dfrac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1}E(C_j)$.
6. Montrer que l'on a : $\forall n\geq 2,\ E(C_{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}+\dfrac{n+2}{n+1}E(C_n)$.

   Poser alors $X_n=C_n-2$ et en déduire : $\forall n\geq 2,\ E(X_{n+1})=2+\dfrac{n+2}{n+1}E(X_n)$.
7. Démontrer par récurrence que l'on a : $\forall n\geq 2,\ E(X_n)=2(n+1)(S_{n+1}-2)$

   où, pour tout entier naturel *n* non nul : $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n}$.
8. Déduire du résultat précédent un équivalent simple de $E(C_n)$ en $+\infty$.