

Olympiades de mathématiques

2007 – Lille – Exercice 3 - Sujet

Ma calculatrice ne dispose que de trois fonctions :

1. Le passage à l'opposé : touche $(-)$;
2. L'élevation au carré : touche x^2 ;
3. L'opération $*$ définie par $y * x = y + \frac{1}{x}$ pour y réel quelconque et x réel non nul : touche $*$.

On dispose également de parenthèses.

Comment peut-on déterminer :

- a) L'inverse d'un nombre non nul ?
- b) La somme de deux nombres non nuls ?
- c) La moitié d'un nombre non nul ?
- d) Le produit de deux nombres non nuls ?

Olympiades de mathématiques

2007 – Lille – Exercice 3 - Corrigé

- a) L'inverse apparaît comme deuxième terme dans l'expression de $y * x$. Il suffit donc d'annuler le premier ... Pour tout x réel non nul, on a :

$$0 * x = 0 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{1}{x} = 0 * x}$$

- b) L'opération $*$ nous permet d'ajouter à un nombre l'inverse d'un deuxième. On a donc immédiatement :

$$y + x = y + \frac{1}{\frac{1}{x}} = y * \frac{1}{x}$$

Or, nous venons d'obtenir $\frac{1}{x} = 0 * x$. On peut donc finalement écrire :

$$y + x = y * \frac{1}{x} = y * (0 * x)$$

$$\boxed{y + x = y * (0 * x)}$$

c) La notion de division semble apparaître dans cette question puisque pour x non nul, nous cherchons $\frac{x}{2}$.

Or, puisque nous disposons de l'addition, nous pouvons facilement obtenir le double d'un nombre ...

Nous allons nous ramener à cette situation en écrivant :

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}}$$

D'après la question a) : $\frac{1}{x} = 0 * x$. Il vient alors, en utilisant le résultat de la question b) :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} * x = (0 * x) * x$$

Il convient, enfin, d'inverser ce résultat.

On a finalement :

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x}} = 0 * ((0 * x) * x)$$

$$\boxed{\frac{x}{2} = 0 * ((0 * x) * x)}$$

d) Nous voici arriv(é)s à la dernière question ... et certaines touches n'ont pas été utilisées ... l'élévation au carré notamment. Ce constat doit nous guider (nous sommes bien loin d'un raisonnement mathématique mais toute piste est bonne à prendre aux Olympiades ☺ !).

Somme, multiplication ou division par 2, élévation au carré ... Et nous cherchons un produit ! Une identité remarquable nous vient à l'esprit (non ?) :

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Elle nous permet d'écrire :

$$xy = \frac{(x + y)^2 - x^2 - y^2}{2} = \frac{(x + y)^2 + (-x^2) + (-y^2)}{2}$$

Les ingrédients sont réunis ...

(au regard, cher lecteur(trice), de la taille de certaines expressions ci-après, nous quittons le mode « double colonne » au profit du mode « colonne unique »)

$$\text{On a déjà : } (x + y)^2 = (x * (0 * y))^2 .$$

$$\text{Par ailleurs : } (-x^2) + (-y^2) = (-x^2) * (0 * (-y^2)) .$$

On en déduit :

$$(x + y)^2 + (-x^2) + (-y^2) = (x * (0 * y))^2 * (0 * ((-x^2) * (0 * (-y^2))))$$

D'après la question c) enfin, on a :

$$xy = \frac{(x + y)^2 + (-x^2) + (-y^2)}{2} = 0 * \left(\left(0 * \left((x * (0 * y))^2 * (0 * ((-x^2) * (0 * (-y^2)))) \right) \right) * \left((x * (0 * y))^2 * (0 * ((-x^2) * (0 * (-y^2)))) \right) \right) \quad (1)$$

Pour ce qui est des parenthèses, n'hésitez pas à vérifier ...

Une remarque (un peu plus sérieuse !).

On peut s'interroger sur le fait d'avoir privilégié l'identité remarquable $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ au lieu de $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$.

En fait, on peut (et c'est classique !) les utiliser toutes les deux pour écrire :

$$xy = \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x - y}{2} \right)^2 = \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 + \left(- \left(\frac{x + (-y)}{2} \right)^2 \right)$$

Vous avez maintenant compris le principe. A vous de voir ce que donne cette formule ...

Nous vous proposons également celle-ci : $xy = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + (-x^2) + \left(-\left(\frac{y}{2}\right)^2\right)$.

On a d'abord : $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(x * (0 * (0 * ((0 * y) * y)))\right)^2$ et $-\left(\frac{y}{2}\right)^2 = -(0 * ((0 * x) * x))^2$.

D'où : $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + (-x^2) = \left(x * (0 * (0 * ((0 * y) * y)))\right)^2 * (0 * (-x^2))$.

Alors : $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + (-x^2) + \left(-\left(\frac{y}{2}\right)^2\right) = \left(\left(x * (0 * (0 * ((0 * y) * y)))\right)^2 * (0 * (-x^2))\right) * \left(0 * \left(-\left(0 * ((0 * x) * x)\right)^2\right)\right)$.

$$\boxed{xy = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\left(x * (0 * (0 * ((0 * y) * y)))\right)^2 * (0 * (-x^2))\right) * \left(0 * \left(-\left(0 * ((0 * x) * x)\right)^2\right)\right)} \quad (2)$$

On peut, comme vous l'avez constaté, trouver des solutions diverses et variées. Dans la réalité, ce genre de problème se pose concrètement dans, par exemple, la conception de circuits électroniques. De nombreux paramètres doivent être pris en compte dont, en particulier, le « coût » (en temps, par exemple) associé à une opération donnée ou les éventuelles possibilités de manipulation en mémoire (dans l'égalité (1), par exemple, la quantité $(x + y)^2 + (-x^2) + (-y^2)$ est requise DEUX fois pour la division par 2. Il est « clair » qu'effectuer DEUX fois le calcul $(x + y)^2 + (-x^2) + (-y^2) = \left(x * (0 * y)\right)^2 * \left(0 * \left((-x^2) * \left(0 * (-y^2)\right)\right)\right)$ serait assez ... peu efficace !).