Concours général de mathématiques

2005

Exercice 2 – Corrigé

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$.

On suppose que $f(0)=f(1)=0$ et que pour tout *x* réel de l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$,

$f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$.

1. Considérons la fonction *g* définie sur l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$ par :

$$g:x\mapsto f\left(x+\frac{3}{10}\right)-f(x)$$

La fonction $x\mapsto x+\frac{3}{10}$ est continue sur l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$ en tant que fonction affine.

Elle prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[\frac{3}{10},1\right]$.

La fonction *f* est, par hypothèse, continue sur l'intervalle $[0,1]$. Elle l'est donc à fortiori sur l'intervalle $\left[\frac{3}{10},1\right]$.

On en déduit de ce qui précède que la fonction $x\mapsto f\left(x+\frac{3}{10}\right)$ est continue sur l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$.

La fonction *f* est, par hypothèse, continue sur l'intervalle $[0,1]$. Elle l'est donc à fortiori sur l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$.

Finalement, nous pouvons affirmer que la fonction *g* est continue sur l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$ en tant que différence de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Par ailleurs, puisque l'on a $f\left(x+\frac{3}{10}\right) \neq f(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$, on en déduit immédiatement que la fonction g ne s'annule pas sur cet intervalle.

La continuité de g et sa non nullité nous permettent de conclure que cette fonction garde un signe constant sur l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$ (si la fonction g changeait de signe, le théorème des valeurs intermédiaires nous permettrait alors d'affirmer que la fonction s'annule).

Nous pouvons, par exemple, supposer que l'on a : $g(x)>0$ pour tout réel x de $\left[0,\frac{7}{10}\right]$.

On a alors :

$$g(0)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{10}\right)-\cancel{f(0)}>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{10}\right)>0$$
$$g\left(\frac{3}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\right)-f\left(\frac{3}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{6}{10}\right)>f\left(\frac{3}{10}\right)$$
$$g\left(\frac{6}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\right)-f\left(\frac{6}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{9}{10}\right)>f\left(\frac{6}{10}\right)$$

En définitive : $f\left(\frac{9}{10}\right)>f\left(\frac{6}{10}\right)>f\left(\frac{3}{10}\right)>0$

On a, de façon analogue :

$$g\left(\frac{7}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{7}{10}+\frac{3}{10}\right)-f\left(\frac{7}{10}\right)>0 \Leftrightarrow \cancel{f(1)}-f\left(\frac{7}{10}\right)>0 \Leftrightarrow -f\left(\frac{7}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{7}{10}\right)<0$$
$$g\left(\frac{4}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\right)-f\left(\frac{4}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{7}{10}\right)-f\left(\frac{4}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{4}{10}\right)<f\left(\frac{7}{10}\right)$$
$$g\left(\frac{1}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\right)-f\left(\frac{1}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{4}{10}\right)-f\left(\frac{1}{10}\right)>0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{10}\right)<f\left(\frac{4}{10}\right)$$

En définitive : $f\left(\frac{1}{10}\right)<f\left(\frac{4}{10}\right)<f\left(\frac{7}{10}\right)<0$

On a finalement :

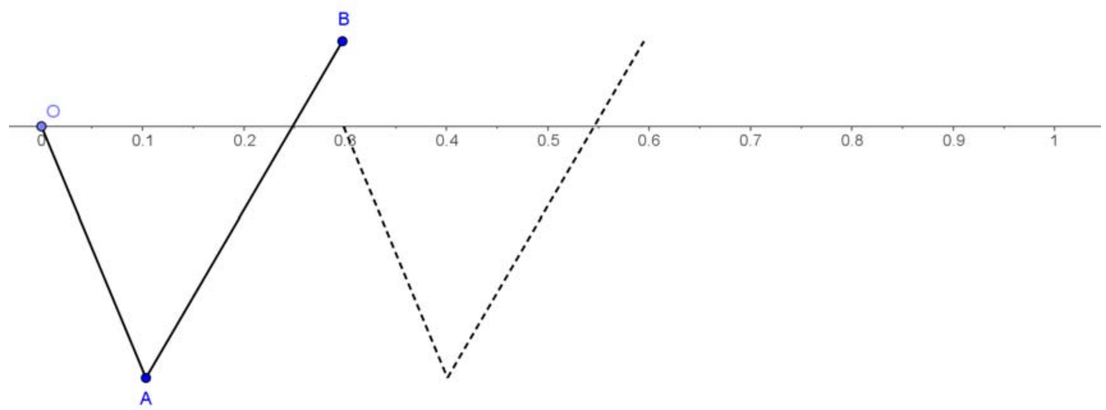
$$f\left(\frac{1}{10}\right)<f\left(\frac{4}{10}\right)<f\left(\frac{7}{10}\right)<0<f\left(\frac{3}{10}\right)<f\left(\frac{6}{10}\right)<f\left(\frac{9}{10}\right)$$

La fonction *f* est continue et change de signe sur les cinq intervalles $\left]\frac{1}{10};\frac{3}{10}\right[$, $\left]\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right[$, $\left]\frac{4}{10};\frac{6}{10}\right[$, $\left]\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right[$ et $\left]\frac{7}{10};\frac{9}{10}\right[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule donc au moins une fois sur chacun d'eux.
Comme, par ailleurs, on a : $f(0)=f(1)=0$, on peut finalement conclure :

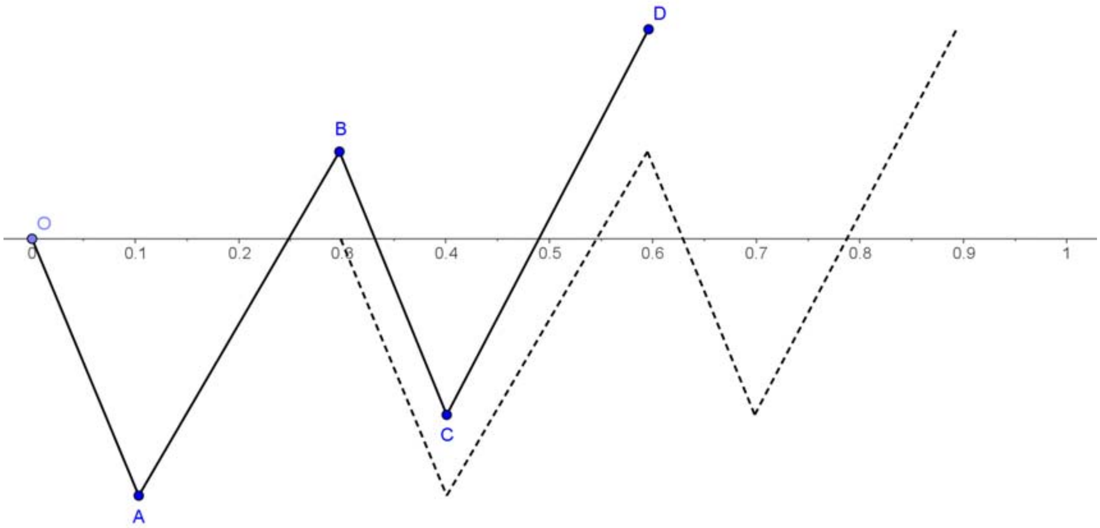
$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ s'annule au moins sept fois sur l'intervalle } [0,1].}$$

2. Nous pouvons construire la courbe représentative d'une fonction *f*, affine par morceaux, vérifiant les hypothèses en procédant comme suit :

   - On a : $f(0)=0$ et $f\left(\frac{1}{10}\right)<0$. Nous commençons par tracer (en trait épais sur la figure ci-dessous) le segment d'extrémités les points de coordonnées $\mathrm{O}(0;0)$ et $\mathrm{A}\left(\frac{1}{10};f\left(\frac{1}{10}\right)\right)$. Comme nous devons avoir $f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$ pour tout réel *x* de l'intervalle $\left[0,\frac{7}{10}\right]$, nous allons construire l'image (en pointillés sur la figure ci-dessous) de ce segment par la translation de vecteur $\frac{3}{10}\vec{i}$.
   - Nous avons ensuite $f\left(\frac{3}{10}\right)>0$. Nous traçons alors le segment d'extrémités les points de coordonnées $\mathrm{A}\left(\frac{1}{10};f\left(\frac{1}{10}\right)\right)$ et $\mathrm{B}\left(\frac{3}{10};f\left(\frac{3}{10}\right)\right)$. Comme précédemment, nous construisons l'image de ce deuxième segment par la translation de vecteur $\frac{3}{10}\vec{i}$.



- On a : $f\left(\frac{1}{10}\right)<f\left(\frac{4}{10}\right)$ et la contrainte $f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$ impose que le segment d'extrémités les points d'extrémités $B\left(\frac{3}{10};f\left(\frac{3}{10}\right)\right)$ et $C\left(\frac{4}{10};f\left(\frac{4}{10}\right)\right)$ ne coupe pas le premier segment pointillé construit précédemment.
  On place alors C et on construit l'image du segment [BC] par la translation de vecteur $\frac{3}{10}\vec{i}$.
- De façon analogue, on place le point $D\left(\frac{6}{10};f\left(\frac{6}{10}\right)\right)$ et on construit l'image du segment [CD] par la translation de vecteur $\frac{3}{10}\vec{i}$.



- On a : $f\left(\frac{4}{10}\right)<f\left(\frac{7}{10}\right)$ et la contrainte $f\left(x+\frac{3}{10}\right)\neq f(x)$ impose que le segment d'extrémités les points $D\left(\frac{6}{10};f\left(\frac{6}{10}\right)\right)$ et $E\left(\frac{7}{10};f\left(\frac{7}{10}\right)\right)$ ne coupe pas le troisième segment pointillé construit précédemment.
  On place alors E et on construit l'image du segment [DE] par la translation de vecteur $\frac{3}{10}\vec{i}$.
- De façon analogue, on place le point $F\left(\frac{9}{10};f\left(\frac{9}{10}\right)\right)$ mais il n'est alors pas utile de construire l'image du segment [EF] par la translation de vecteur $\frac{3}{10}\vec{i}$ puisque

l'abscisse de E vaut $\frac{7}{10}$, borne supérieure de l'intervalle sur lequel la fonction $x \mapsto f\left(x+\frac{3}{10}\right)$ est définie.

- Enfin, on trace le segment d'extrémités $\mathrm{F}\left(\frac{9}{10}; f\left(\frac{9}{10}\right)\right)$ et $\mathrm{G}(1;0)$.