Concours général de mathématiques

2008

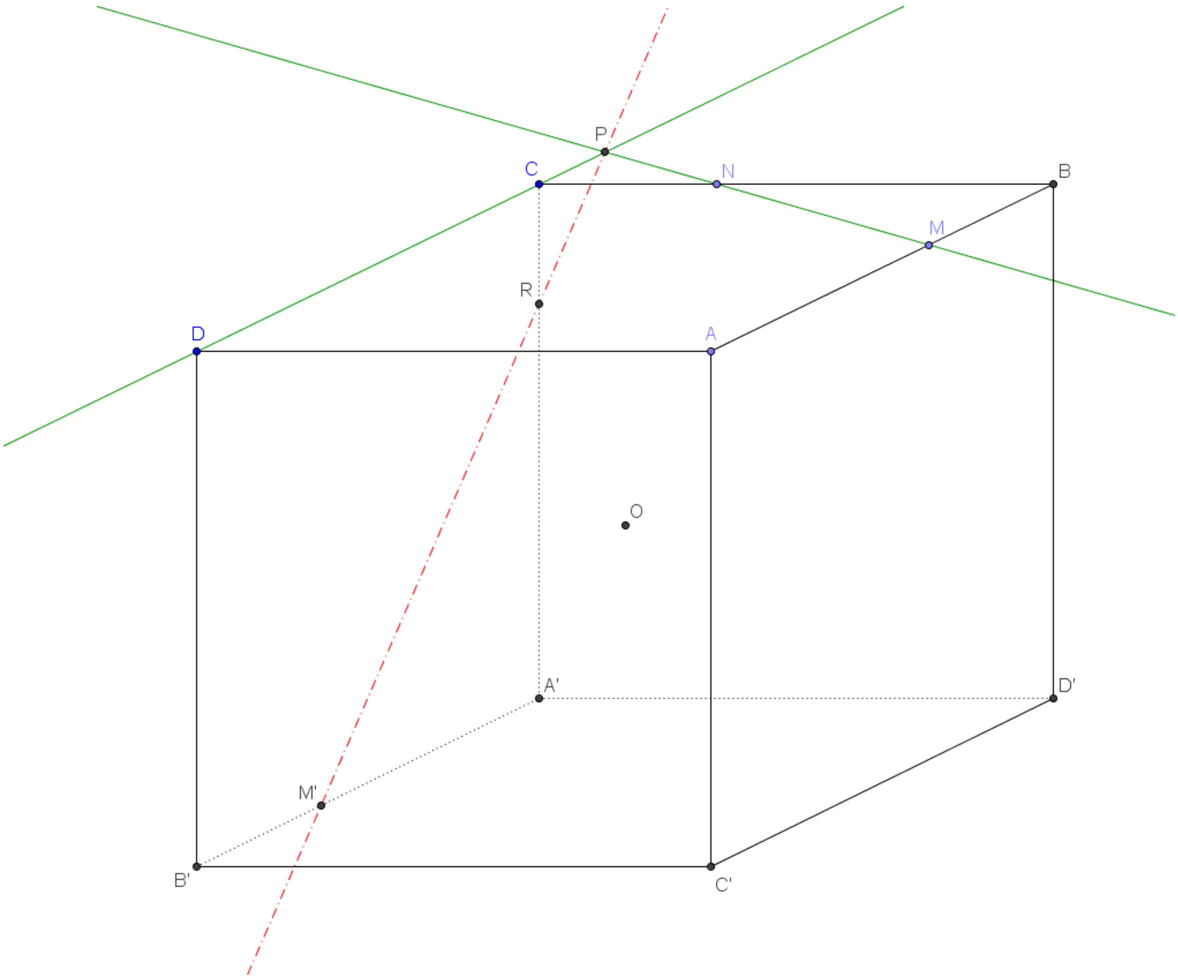
Exercice 3 – Corrigé

Partie II. Sections planes d'un cube

C. Plans $\mathscr{P}$ rencontrant 6 arêtes de $\mathscr{K}$

Le plan $\mathscr{P}$ rencontre l'arête [AB] en $\mathrm{M}(x;1;1)$ et l'arête [BC] en $\mathrm{N}(-1;y;1)$.
Puisque, par hypothèse, le plan $\mathscr{P}$ ne passe par aucun sommet de $\mathscr{K}$, on a : $x \in]-1;1[$ et $y \in]-1;1[$.

1. La figure ci-dessous illustre la construction du point R. Elle illustre également la justification (voir ci-après) de son … existence !



Le point M appartient à l’arête [AB] privée de ses extrémités. Le point N appartient à l’arête [BC] privée de ses extrémités. Les droites (DC) et (MN) sont coplanaires (elles appartiennent au plan d’équation $z=1$) et sécantes (considérer les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{MN}$ et trouver la condition nécessaire et suffisante de colinéarité).

Soit alors P leur point d’intersection.

Nous allons commencer par établir que les droites (PM') et $(A'C)$ sont sécantes.

On établit facilement que l’abscisse du point P est strictement inférieure à -1.

En tant que point de la droite (MN), P appartient au plan $\mathscr{P}$.
Le point M', symétrique de M par rapport à O, est également un point du plan $\mathscr{P}$.
La droite (PM') est donc incluse dans le plan $\mathscr{P}$.

Considérons maintenant le plan support de la face CDB’A’ (plan d’équation $y=-1$).
Il contient la droite (CD) et donc le point P. Il contient également le point M'.
La droite (PM') est donc incluse dans ce plan.

La droite (PM') est la droite d’intersection des plans $\mathscr{P}$ et (CDB').
Les droites (PM') et $(A'C)$ sont donc coplanaires.

Comme l’abscisse de P est strictement inférieure à -1, les droites (PM') et $(A'C)$ ne sont pas parallèles (les vecteurs $\overrightarrow{A'C}$ et $\overrightarrow{PM'}$ ne peuvent être colinéaires).
Nous appelons alors R leur point d’intersection.

Nous allons maintenant montrer que le point R appartient à l’arête [A’C] privée de ses extrémités.

Le point P a une abscisse strictement inférieure à -1 et une cote égale à 1 (l’ordonnée ne nous intéresse pas ici). Le point M’ a une abscisse strictement supérieure à -1 et une cote égale à -1. On en déduit (version géométrique du théorème des valeurs intermédiaires …) qu’il existe un point du segment [PM’] privé de ses extrémités dont l’abscisse est nulle, sa cote étant alors comprise, strictement, entre 1 et -1. Ce point est simplement le point d’intersection du segment [PM’] et de la droite $(A'C)$ et il appartient au segment [A’C] privé de ses extrémités. D’après ce qui précède, ce point est le point d’intersection des droites (PM') et $(A'C)$, c'est-à-dire R.

Le résultat est ainsi établi.

La construction de R est alors la suivante :

- On construit le point P intersection des droites (DC) et (MN) ;
- R est alors l’intersection des droites (PM') et $(A'C)$.

2. Nous allons, dans un premier temps, déterminer une équation du plan (OMN).

Puisque ce plan contient le point O, toute équation de ce plan est de la forme :

$$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0$$

On a alors :

$$\mathrm{M}\in(\mathrm{OMN})\Leftrightarrow \alpha\times x+\beta\times 1+\gamma\times 1=0\Leftrightarrow \alpha x+\beta+\gamma=0$$
$$\mathrm{N}\in(\mathrm{OMN})\Leftrightarrow \alpha\times(-1)+\beta\times y+\gamma\times 1=0\Leftrightarrow -\alpha+\beta y+\gamma=0$$

On a donc le système :

$$\begin{cases}\alpha x+\beta+\gamma=0\\-\alpha+\beta y+\gamma=0\end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{cases}\alpha x+\beta+\gamma=0\\-\alpha+\beta y+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta+\gamma=-\alpha x\\\beta y+\gamma=\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\gamma-\alpha x\\\beta y+\gamma-y(\beta+\gamma)=\alpha+y\alpha x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\gamma-\alpha x\\(1-y)\gamma=(1+yx)\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\gamma-\alpha x\\\gamma=\dfrac{1+yx}{1-y}\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\dfrac{1+yx}{1-y}\alpha-\alpha x\\\gamma=\dfrac{1+yx}{1-y}\alpha\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\dfrac{1+yx}{1-y}\alpha-\alpha x\\\gamma=\dfrac{1+yx}{1-y}\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{-1-yx-x+xy}{1-y}\alpha\\\gamma=\dfrac{1+yx}{1-y}\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=\dfrac{-1-x}{1-y}\alpha\\\gamma=\dfrac{1+yx}{1-y}\alpha\end{cases}$$

En choisissant $\alpha=1-y$ on obtient alors :

$$\begin{cases}\beta=-1-x\\\gamma=1+yx\end{cases}$$

Une équation du plan (OMN) est donc : $(1-y)X-(1+x)Y+(1+xy)Z=0$

Finalement :

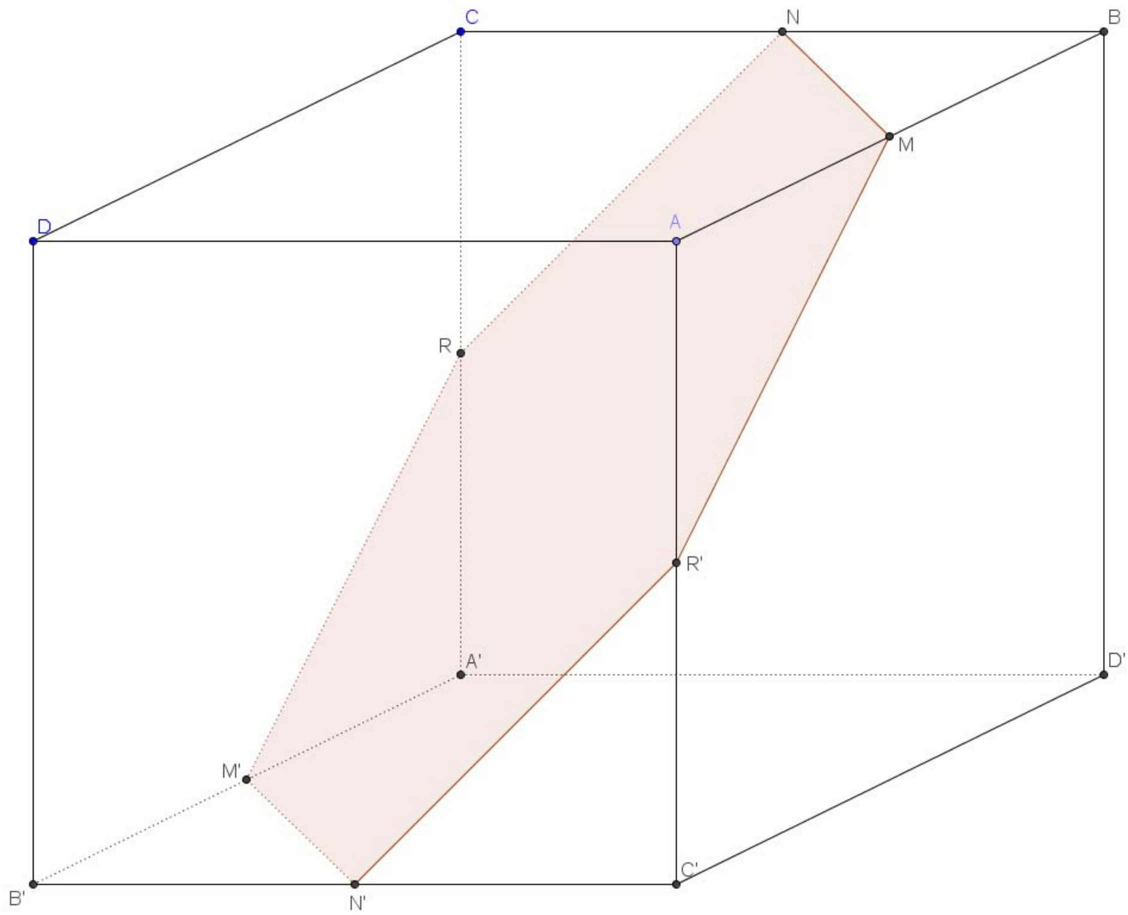
$$\mathrm{R}(-1;-1;z)\in(\mathrm{OMN})\Leftrightarrow-(1-y)+(1+x)+(1+xy)z=0\Leftrightarrow x+y+z+xyz=0$$

On a bien :

$$\boxed{x+y+z+xyz=0\qquad(1)}$$

3. On suppose ici : $x = y = z = 0$. On a donc : $\mathrm{M}(0;1;1)$ (milieu de l'arête [AB]), $\mathrm{N}(-1;0;1)$ (milieu de l'arête [BC]) et $\mathrm{R}(-1;-1;0)$ (milieu de l'arête [CA']).

   On peut alors représenter $\mathscr{A}$ comme suit :



Pour calculer l'aire S de $\mathscr{A}$, nous procédons comme dans la partie B en projetant l'hexagone obtenu sur trois faces (en fait sur les plans support) perpendiculaires deux à deux.

Par exemple, en projetant sur la face $AC'B'D$ (la face avant), nous obtenons la situation illustrée sur la figure de la page suivante (d'un point de vue analytique, cette face admet pour support le plan d'équation $x = 1$. Pour obtenir le projeté orthogonal sur ce plan d'un point quelconque de l'espace, il suffit donc de remplacer son abscisse par 1 !).

On obtient alors la figure ci-après (le polygone projeté est le polygone bleu et on a appelé N'' et R'' respectivement les projetés orthogonaux des points N et R).

L'aire du polygone bleu est simplement l'aire de la face $AC'B'D$ (c'est-à-dire 4) à laquelle on retranche la somme des aires des triangles $N'R'C'$ et $DN''R''$. Chacun de ces triangles est rectangle isocèle, la longueur commune des côtés de l'angle droit valant 1. Leur aire commune vaut donc $\frac{1}{2}$. Finalement, l'aire du polygone bleu vaut : $4-2\times\frac{1}{2}=3$.

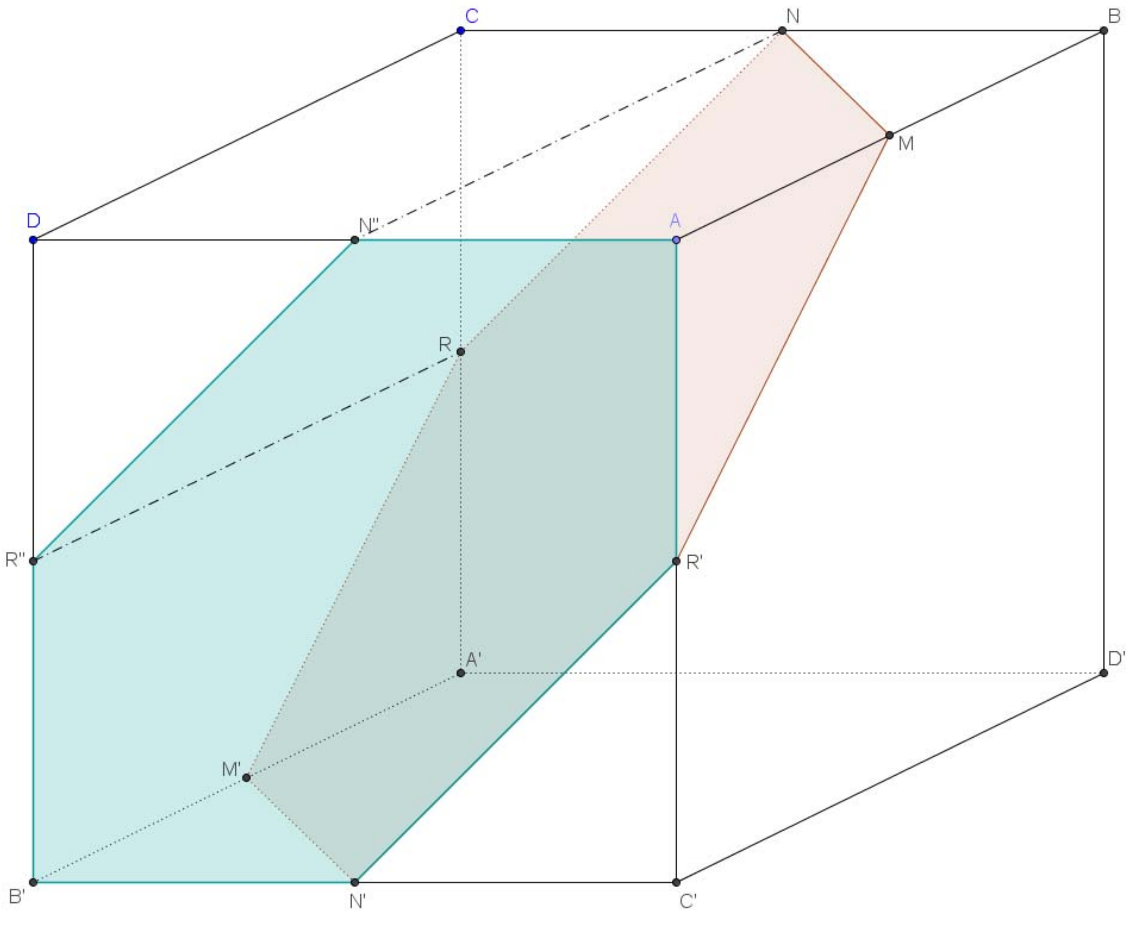
On obtient la même valeur en projetant $\mathscr{A}$ sur les faces ABD'C' et ABCD.

Finalement, en utilisant la relation obtenue à la fin de la deuxième partie :

$$S^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 3\times 3^2$$

D'où :

$$\boxed{S = 3\sqrt{3}}$$



Remarque :

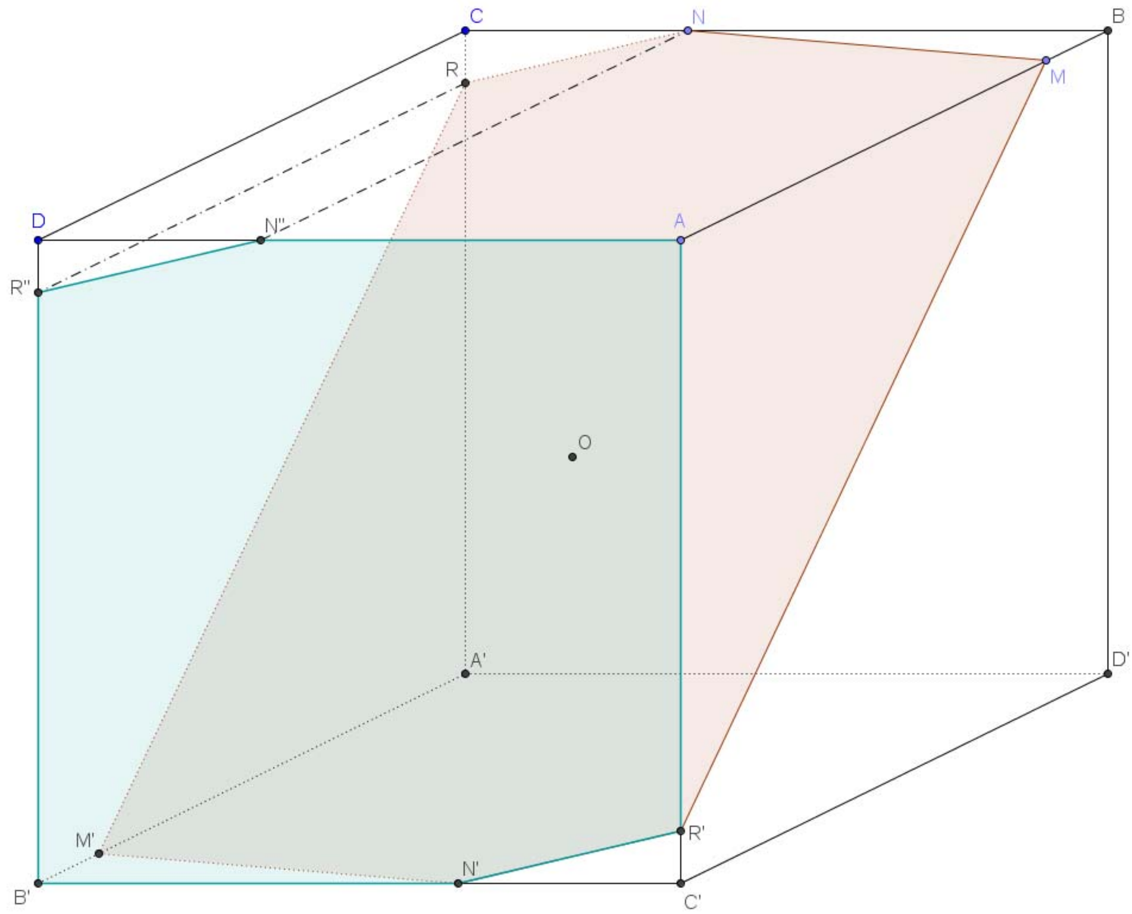
On peut facilement retrouver ce résultat en remarquant que l'hexagone $\mathscr{A}$ est régulier de côté de longueur $\sqrt{2}$.

En effet, on montre que l'on a : $RN = NM = MR' = R'N' = N'M' = M'R = \sqrt{2}$ (Attention ! Le seul fait que les six côtés soient de même longueur ne suffit pas pour conclure !) et $OM = OM' = ON = ON' = OR = OR' = \sqrt{2}$.

On calcule alors facilement l'aire de $\mathscr{A}$: elle est égale à 6 fois l'aire d'une triangle équilatéral de côté $\sqrt{2}$.

4. Cette question va nous permettre de généraliser le résultat obtenu à la question précédente.

   Nous commençons donc par fournir une figure qui généralise la précédente :



Remarque : sous Geogebra, on définit les points M et N comme points des segments [AB] et [BC] respectivement. Le point R est alors construit à partir de ces deux points (cf. la question 1). Sur la figure ci-dessus, les traits de construction de R ont été effacé pour plus de lisibilité …

Pour calculer l'aire de l'hexagone bleu, il convient de calculer l'aire du triangle $N''R''D$ qui, via la symétrie de centre O, est aussi celle du triangle $N'R'C'$.
Comme on a : $N(-1;y;1)$ et $R(-1;-1;z)$, il vient : $N''(1;y;1)$ et $R''(1;-1;z)$.

Comme $D(1;-1;1)$, il vient : $DN''=1+y$ (remarque : $y\in\left]-1;1\right[\Rightarrow y+1>0$).
Par ailleurs : $DR''=1-z$ ($1-z>0$).

On en déduit que l'aire du triangle N''R''D vaut $\dfrac{1}{2}(1+y)(1-z)$ puis que celle de l'hexagone bleu vaut : $4-2\times\dfrac{1}{2}(1+y)(1-z)=4-(1+y-z-yz)=3-y+z+yz$.

En raisonnant de façon similaire avec les faces $ABD'C'$ et ABCD, on obtient deux autres hexagones dont les aires vaudront respectivement : $3+x-z+xz$ et $3-x+y+xy$.

La dernière question de la première partie nous permet alors d'écrire :

$$\boxed{S^2=(3-x+y+xy)^2+(3+x-z+xz)^2+(3-y+z+yz)^2}$$

On pose alors : $f(x,y,z)=(3-x+y+xy)^2+(3+x-z+xz)^2+(3-y+z+yz)^2$.

5. On suppose ici que l'on a : $x+y=0$.

La relation (1) nous donne alors : $z+xyz=0$, soit $z(1+xy)=0$.

On ne peut avoir $1+xy=0$ car $x\in\left]-1;1\right[$ et $y\in\left]-1;1\right[$ entraîne : $1+xy>0$.
On a donc nécessairement : $z=0$.

L'égalité obtenue à la question précédente donne alors, en tenant compte de $y=-x$:

$$\begin{aligned}S^2&=(3-x+y+xy)^2+(3+x-z+xz)^2+(3-y+z+yz)^2\\&=(3-x-x-x^2)^2+(3+x)^2+(3+x)^2\\&=(3-2x-x^2)^2+2(3+x)^2\\&=9\cancel{+4x^2}+x^4\cancel{-12x}\cancel{-6x^2}+4x^3+18\cancel{+12x}\cancel{+2x^2}\\&=x^4+4x^3+27\end{aligned}$$

Etudions la fonction $\varphi:x\mapsto x^4+4x^3+27$ sur l'intervalle $\left]-1;1\right[$.

La fonction φ est dérivable sur $\left]-1;1\right[$ en tant que fonction polynôme et on a, pour tout x de cet intervalle : $\varphi'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$.
Pour tout x de $\left]-1;1\right[$, on a : $x+3>0$ et $4x^2\geq 0$, ce facteur ne s'annulant que pour $x=0$.
On en déduit que la fonction φ est strictement croissante sur $\left]-1;1\right[$.

On a alors : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\left(x^4+4x^3+27\right)=1-4+27=24$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(x^4+4x^3+27\right)=1+4+27=32$.

On en déduit finalement : $24<S^2<32$. Soit finalement :

$$\boxed{2\sqrt{6}<S<4\sqrt{2}}$$

6. Les réels u, v et w sont strictement positifs.
On pose : $x=\dfrac{u-1}{u+1}$, $y=\dfrac{v-1}{v+1}$ et $z=\dfrac{w-1}{w+1}$.

(a) On suppose que x, y et z vérifient la relation (1).

On a donc : $\dfrac{u-1}{u+1}+\dfrac{v-1}{v+1}+\dfrac{w-1}{w+1}+\dfrac{u-1}{u+1}\dfrac{v-1}{v+1}\dfrac{w-1}{w+1}=0$.

Il vient alors :

$$\frac{(u-1)(v+1)(w+1)}{(u+1)(v+1)(w+1)}+\frac{(u+1)(v-1)(w+1)}{(u+1)(v+1)(w+1)}+\frac{(u+1)(v+1)(w-1)}{(u+1)(v+1)(w+1)}+\frac{u-1}{u+1}\frac{v-1}{v+1}\frac{w-1}{w+1}=0\Leftrightarrow$$
$$(u-1)(v+1)(w+1)+(u+1)(v-1)(w+1)+(u+1)(v+1)(w-1)+(u-1)(v-1)(w-1)=0\Leftrightarrow$$
$$\left[(u-1)(v+1)+(u+1)(v-1)\right](w+1)+\left[(u+1)(v+1)+(u-1)(v-1)\right](w-1)=0\Leftrightarrow$$
$$(2uv-2)(w+1)+(2uv+2)(w-1)=0\Leftrightarrow$$
$$(uv-1)(w+1)+(uv+1)(w-1)=0\Leftrightarrow$$
$$uvw\cancel{+uv}\cancel{-w}-1+uvw\cancel{-uv}\cancel{+w}-1=0\Leftrightarrow$$
$$2uvw-2=0\Leftrightarrow$$
$$uvw-1=0$$

Le résultat est ainsi établi.

$$\boxed{uvw=1}$$

On peut alors écrire : $w=\dfrac{1}{uv}$ puis :

$$z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{\frac{1}{uv}-1}{\frac{1}{uw}+1}=\frac{\frac{1-uv}{uv}}{\frac{1+uv}{uv}}=\frac{1-uv}{1+uv}$$

$$\boxed{z=\frac{1-uv}{1+uv}}$$

(b) On pose $g(u,v)=f\left(\frac{u-1}{u+1},\frac{v-1}{v+1},\frac{1-uv}{1+uv}\right)$ et on admet que l'on a :

$$g(u,v)=32\frac{(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)}{(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2}$$

Il convient d'établir : $24\le g(u,v)\le 32$

C'est-à-dire :

$$24\le 32\frac{(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)}{(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2}\le 32$$

Or, on a, en tenant compte de $(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2>0$:

$$\begin{gathered}24\le 32\frac{(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)}{(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2}\le 32\Leftrightarrow\\ 3\le 4\frac{(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)}{(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2}\le 4\Leftrightarrow\\ 3(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2\le 4(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)\le 4(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2\end{gathered}$$

On peut donc établir deux inégalités.

Montrons d'abord :

$$4(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)\le 4(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2$$

soit : $(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)\le(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2$.

On a :

$$\begin{aligned}(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2&=\left[(1+u)(1+v)(1+uv)\right]^2=\left[(1+u+v+uv)(1+uv)\right]^2\\&=\left[1+uv+u+u^2v+v+uv^2+uv+u^2v^2\right]^2\\&=\left[1+u+v+2uv+u^2v+uv^2+u^2v^2\right]^2\\&=1+u^2+v^2+4u^2v^2+u^4v^2+u^2v^4+u^4v^4+2u+2v+4uv+2u^2v+2uv^2+2u^2v^2\\&\qquad+2uv+4u^2v+2u^3v+2u^2v^2+2u^3v^2+4uv^2+2u^2v^2+2uv^3+2u^2v^3\\&\qquad+4u^3v^2+4u^2v^3+4u^3v^3+2u^3v^3+2u^4v^3+2u^3v^4\\&=1+2u+2v+6uv+u^2+v^2+6u^2v+6uv^2+2u^3v+10u^2v^2+2uv^3\\&\qquad+6u^2v^3+6u^3v^2+u^2v^4+6u^3v^3+u^4v^2+2u^3v^4+2u^4v^3+u^4v^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right) &= \left(1+v^2+u^2v^2+2v+2uv+2uv^2\right)\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)\\
&=1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2+v^2+uv^2+u^2v^2+uv^3+u^2v^3+u^2v^4\\
&+u^2v^2+u^3v^2+u^4v^2+u^3v^3+u^4v^3+u^4v^4+2v+2uv+2u^2v+2uv^2+2u^2v^2+2u^2v^3\\
&+2uv+2u^2v+2u^3v+2u^2v^2+2u^3v^2+2u^3v^3+2uv^2+2u^2v^2+2u^3v^2+2u^2v^3+2u^3v^3+2u^3v^4\\
&=1+u+2v+u^2+5uv+v^2+5uv^2+5u^2v+uv^3+9u^2v^2+2u^3v+5u^2v^3+5u^3v^2\\
&+u^2v^4+5u^3v^3+u^4v^2+2u^3v^4+u^4v^3+u^4v^4\end{aligned}$$

On en tire :

$$\begin{aligned}&(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2-(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)\\
&=\cancel{1}+2u+\cancel{2v}+6uv+\cancel{u^2}+\cancel{v^2}+6u^2v+6uv^2+\cancel{2u^3v}+10u^2v^2+2uv^3\\
&+6u^2v^3+6u^3v^2+\cancel{u^2v^4}+6u^3v^3+\cancel{u^4v^2}+\cancel{2u^3v^4}+2u^4v^3+\cancel{u^4v^4}\\
&-\Big(\cancel{1}+u+\cancel{2v}+\cancel{u^2}+5uv+\cancel{v^2}+5uv^2+5u^2v+uv^3+9u^2v^2+\cancel{2u^3v}+5u^2v^3+5u^3v^2\\
&+\cancel{u^2v^4}+5u^3v^3+\cancel{u^4v^2}+\cancel{2u^3v^4}+u^4v^3+\cancel{u^4v^4}\Big)\\
&=u+uv+uv^2+u^2v+uv^3+u^2v^2+u^2v^3+u^3v^2+u^3v^3+u^4v^3\end{aligned}$$

Comme u et v sont strictement positifs, il en va de même pour cette différence.

Montrons maintenant :

$$3(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2\leq 4(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)$$

En nous aidant des calculs précédents, il vient :

$$\begin{aligned}&4(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right)-3(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2\\
&=4\Big(1+u+2v+u^2+5uv+v^2+5uv^2+5u^2v+uv^3+9u^2v^2+2u^3v+5u^2v^3+5u^3v^2\\
&+u^2v^4+5u^3v^3+u^4v^2+2u^3v^4+u^4v^3+u^4v^4\Big)-3\Big(1+2u+2v+6uv+u^2+v^2+6u^2v+6uv^2\\
&+2u^3v+10u^2v^2+2uv^3+6u^2v^3+6u^3v^2+u^2v^4+6u^3v^3+u^4v^2+2u^3v^4+2u^4v^3+u^4v^4\Big)\\
&=1-2u+2v+u^2+2uv+v^2+2uv^2+2u^2v-2uv^3+6u^2v^2+2u^3v+2u^2v^3+2u^3v^2\\
&+u^2v^4+2u^3v^3+u^4v^2+2u^3v^4-2u^4v^3+u^4v^4\\
&=\left(1-2u+u^2\right)+\left(v^2-2uv^3+u^2v^4\right)+\left(u^4v^2-2u^4v^3+u^4v^4\right)+2v+2uv+2uv^2+2u^2v\\
&+6u^2v^2+2u^3v+2u^2v^3+2u^3v^2+2u^3v^3+2u^3v^4\\
&=(1-u)^2+v^2(1-uv)^2+u^4v^2(1-v)^2+2v+2uv+2uv^2+2u^2v\\
&+6u^2v^2+2u^3v+2u^2v^3+2u^3v^2+2u^3v^3+2u^3v^4\end{aligned}$$

Ici encore, on obtient une quantité strictement positive.

Finalement, on a l'encadrement :

$$3(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2 < 4(1+v+uv)^2\left(1+u+u^2+uv+u^2v+u^2v^2\right) < 4(1+u)^2(1+v)^2(1+uv)^2$$

Et on en déduit que pour tout couple de réels strictement positifs (u,v), on a :

$$\boxed{24 < g(u,v) < 32}$$

Lorsque u et v varient dans l'intervalle $]0;+\infty[$, on montre facilement que x et y varient dans l'intervalle $]-1;1[$.
On a : $g(u,v)=S^2$ et on vient de montrer que l'on avait $24 < g(u,v) < 32$.
D'où : $2\sqrt{6} < S < 4\sqrt{2}$.

Peut-on améliorer cet encadrement ?

La réponse est négative.

En effet, à la question précédente (question 5.), nous avions établi un tel encadrement dans la situation où la somme $x+y$ était nulle.

La condition $x+y=0$ équivaut ici à : $\dfrac{1-u}{1+u}+\dfrac{1-v}{1+v}=0$.

Or :

$$\frac{1-u}{1+u}+\frac{1-v}{1+v}=0 \Leftrightarrow (1-u)(1+v)+(1-v)(1+u)=0 \Leftrightarrow 2-2uv=0 \Leftrightarrow uv=1$$

(on remarque au passage que l'on retrouve $z=0$)

Pour u et v tels que $uv=1$, on est dans la situation de la question 5 et on a :
$2\sqrt{6} < S < 4\sqrt{2}$ qui est le meilleur encadrement possible.
Si u et v sont strictement positifs quelconques, on a encore : $2\sqrt{6} < S < 4\sqrt{2}$.
On déduit de ce qui précède que cet encadrement de S est le meilleur possible dès lors que le plan $\mathscr{P}$ rencontre 6 arêtes $\mathscr{K}$.

$$\boxed{2\sqrt{6} < S < 4\sqrt{2}}$$