Sujet 2009

Exercice 1

Le but de cet exercice est la recherche des fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans l'intervalle $[-1;1]$, vérifiant pour tout réel *x* la relation $f(2x) = 2f(x)^2 - 1$, telles que $f(0) = 1$ et que le rapport $\dfrac{1-f(x)}{x^2}$ admette une limite finie lorsque *x* tend vers 0, que l'on notera *a*.

On rappelle que tout *x* de $[-1;1]$ s'écrit de façon unique $x = \cos\theta$ avec θ dans $[0;\pi]$.

1. (a) Vérifier que :

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}.$$

   On pourra utiliser une formule donnant $\cos(2\alpha)$.

   (b) Montrer, pour θ dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, les relations :

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta \text{ et } \cos\theta \leq 1 - \frac{\theta^2}{\pi}.$$

2. Soit *f* une fonction solution du problème. On se donne un réel *x* et l'on pose, pour tout entier naturel *n* :

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\theta_n$$

   avec θ_n dans $[0;\pi]$.

   (a) Montrer que *f* est continue en 0 et que :

$$\lim_{n\to+\infty} \theta_n = 0.$$

   (b) Vérifier l'existence d'un entier *N* tel que pour tout $n \geq N$, on ait :

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$

   (c) Etablir que *a* est positif et que :

$$f(x) = \cos(x\sqrt{2a}).$$