Concours général de mathématiques

2009

Exercice 2 – Corrigé

En guise de préambule, rappelons que le fait de lancer 4 dés indiscernables équivaut à les lancer *successivement*. Les résultats des lancers étant indépendants, nous pouvons décrire l'expérience proposée (le jeu) comme la répétition (4 fois) de l'expérience aléatoire consistant à lancer *un seul dé*.

Pour chaque dé, il y a 20 issues possibles et elles sont équiprobables (la probabilité de chacune de ces issues, rappelée dans l'énoncé, vaut $\frac{1}{20}$). Pour les quatre, il ya aura donc au total $20^4 = 160\ 000$ issues possibles et elles sont également équiprobables.

1. Dans ce jeu, on ne marque rien si les quatre faces obtenues sont distinctes deux à deux.

   On peut donc définir l'événement : P : « les quatre faces sont distinctes deux à deux ».

   Pour dénombrer le nombre total d'issues réalisant P, on peu procéder comme suit :

   - Il y a 20 possibilités pour le premier dé ;
   - Il y a alors 19 possibilités pour le second dé ;
   - Il y a alors 18 possibilités pour le troisième dé ;
   - Il y a enfin 17 possibilités pour le dernier dé.

   La probabilité $p(\mathrm{P})$ de l'événement P vaut donc :

$$p(\mathrm{P}) = \frac{20\times19\times18\times17}{20^4} = \frac{19\times18\times17}{20^3} = \frac{19\times9\times\cancel{2}\times17}{\cancel{2}\times10\times20^2} = \frac{2907}{4000} = 0,726\ 75$$

$$\boxed{\text{La probabilité de ne rien marquer est égale à } \frac{2907}{4000} = 0,726\ 75.}$$

2. Soit a entier compris entre 1 et 20.

Considérons un seul dé. La probabilité d'obtenir a (« SUCCES ») vaut $\frac{1}{20}$ et celle d'obtenir une autre valeur (« ECHEC ») vaut $1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$.

On a ainsi affaire à une loi de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{20}$.

Lancer quatre dés équivaut à lancer successivement quatre fois le même dé et donc à répéter quatre fois l'expérience de Bernoulli que nous venons de décrire. La variable aléatoire N_a correspondant au nombre de « SUCCES » (nombre de fois où a est obtenu) suit alors une loi binomiale de paramètres $n=4$ et $p=\frac{1}{20}$.

Il vient alors classiquement :

$$p(\mathrm{N}_a=0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{20}\right)^0\left(\frac{19}{20}\right)^{4-0}=1\times1\times\frac{19^4}{20^4}=\frac{130\ 321}{160\ 000}$$

$$p(\mathrm{N}_a=1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{20}\right)^1\left(\frac{19}{20}\right)^{4-1}=4\times\frac{1}{20}\times\frac{19^3}{20^3}=\frac{4\times6\ 859}{160\ 000}=\frac{6\ 859}{40\ 000}$$

$$p(\mathrm{N}_a=2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^{4-2}=6\times\frac{1}{20^2}\times\frac{19^2}{20^2}=\frac{6\times361}{160\ 000}=\frac{1\ 083}{80\ 000}$$

$$p(\mathrm{N}_a=3)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{20}\right)^3\left(\frac{19}{20}\right)^{4-3}=4\times\frac{1}{20^3}\times\frac{19}{20}=\frac{4\times19}{160\ 000}=\frac{19}{40\ 000}$$

$$p(\mathrm{N}_a=4)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{20}\right)^4\left(\frac{19}{20}\right)^{4-4}=1\times\frac{1}{20^4}\times1=\frac{1}{160\ 000}$$

On peut réunir ces résultats dans le tableau ci-dessous (loi de la variable aléatoire N_a) :

k	0	1	2	3	4
$p(\mathrm{N}_a=k)$	$\frac{130\ 321}{160\ 000}$	$\frac{6\ 859}{40\ 000}$	$\frac{1\ 083}{80\ 000}$	$\frac{19}{40\ 000}$	$\frac{1}{160\ 000}$

Cette loi ne dépend pas de a.

3. D'après la question précédente, on a immédiatement :

$$\begin{aligned}p(\mathrm{X}_a=0)&=p(\mathrm{N}_a=0)+p(\mathrm{N}_a=1)\\&=\frac{130\ 321}{160\ 000}+\frac{6\ 859}{40\ 000}\\&=\frac{157\ 757}{160\ 000}\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} p(\mathrm{X}_a = 1) &= 1 - p(\mathrm{X}_a = 0) \\ &= 1 - \frac{157\ 757}{160\ 000} \\ &= \frac{2\ 243}{160\ 000} \end{aligned}$$

La loi de la variable aléatoire X_a est donc :

k	0	1
$p(\mathrm{X}_a = k)$	$\frac{157\ 757}{160\ 000}$	$\frac{2\ 243}{160\ 000}$

Si la variable aléatoire X_a prend la valeur 1, le gain est de *a*. Si elle prend la valeur 0, le gain est nul. Le gain associé à la face *a* vaut donc $a\mathrm{X}_a$. Pour obtenir le gain total, il convient d'additionner ces gains en faisant varier *a* de 1 à 20 :

$$\boxed{G = \mathrm{X}_1 + 2\mathrm{X}_2 + \ldots + 20\mathrm{X}_{20} = \sum_{a=1}^{20} a\mathrm{X}_a}$$

On peut alors facilement déterminer l'espérance $\mathrm{E}(G)$ du gain G :

$$\mathrm{E}(G) = \mathrm{E}\left(\sum_{a=1}^{20} a\mathrm{X}_a\right) = \sum_{a=1}^{20} \mathrm{E}(a\mathrm{X}_a) = \sum_{a=1}^{20} a\mathrm{E}(\mathrm{X}_a)$$

Les variables aléatoires X_a suivent toutes la même loi (cf. le tableau en haut de la page) d'espérance :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_a) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0 \times \frac{157\ 757}{160\ 000} + 1 \times \frac{2\ 243}{160\ 000} = \frac{2\ 243}{160\ 000}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(G) = \sum_{a=1}^{20} a\mathrm{E}(\mathrm{X}_a) = \mathrm{E}(\mathrm{X}) \times \sum_{a=1}^{20} a &= \frac{2\ 243}{160\ 000} \times \frac{20 \times 21}{2} \\ &= \frac{2\ 243 \times \cancel{10} \times 21}{160\ 00\cancel{0}} = \frac{47\ 103}{16\ 000} \simeq 2{,}943\ 937\ 5 \end{aligned}$$

En moyenne, on peut espérer un gain d'environ 2,94 points.

4. On cherche ici $p(G = 8)$.

Ce gain peut être obtenu de diverses façons :

- 2 fois la face « 8 » et pas d'autre double ;
- 3 fois la face « 8 » et la 4ème face différente de « 8 » ;
- 4 fois la face « 8 ».
- 2 fois la face « 1 » et 2 fois la face « 7 » ;
- 2 fois la face « 2 » et 2 fois la face « 6 » ;
- 2 fois la face « 3 » et 2 fois la face « 5 ».

→ Pour obtenir un double « 8 » et deux autres faces distinctes il faut que les faces de deux des quatre dés portent le « 8 », ce qui nous donne $\binom{4}{2}=6$ possibilités. Pour chacune d'elles, on a : $19\times 18=342$ possibilités pour choisir deux autres faces distinctes.
Au total, il y a donc : $6\times 342=2052$ possibilités.

→ Pour obtenir 3 fois la face « 8 » ou 4 fois la face « 8 », nous pouvons nous reporter à la question 2 et reprendre les valeurs obtenues pour $\mathrm{N}_8=3$ et $\mathrm{N}_8=4$ (mais sans diviser par 20^4 car pour l'instant nous ne cherchons pas à calculer une probabilité). On obtient cette fois un total de $4\times 19+1=77$ possibilités.

→ Enfin, pour chacune des trois autres situations (2 doubles dans chacune), on a 6 possibilités pour le premier double et … 1 seule pour le second ! Par exemple, les 6 possibilités pour la situation correspondant à 2 fois la face « 1 » et 2 fois la face « 7 » peuvent être décrites par :

$$1-1-7-7$$
$$1-7-1-7$$
$$1-7-7-1$$
$$7-7-1-1$$
$$7-1-7-1$$
$$7-1-1-7$$

Au total, il y a donc : $2\ 052+77+3\times 6=2\ 052+95=2\ 147$.

D'où, finalement :

$$\boxed{p\left(G=8\right)=\frac{2\ 147}{160\ 000}=0,013\ 418\ 75}$$

5. On a obtenu : $11-7-2-2$. On a donc un gain de 2.

   En relançant tout ou partie des dés, on espère améliorer ce gain. L'alternative (proposée) comporte trois choix : relancer les quatre dés, conserver les deux 2 ou conserver le 11. Afin de comparer ces choix, nous allons, pour chacun d'eux, évaluer l'espérance du gain global associé. Nous retiendrons, in fine, le choix offrant la plus grande espérance au niveau du gain global.

$\boxed{\text{1}^{\text{er}} \text{ choix : on relance les quatre dés.}}$

Dans ce cas, l'espérance du gain est simplement l'espérance calculée à la question 3, soit environ 2,94 points. En notant G_1 ce gain, on a :

$$E(G_1) = 2{,}943\ 937\ 5$$

$\boxed{\text{2}^{\text{ème}} \text{ choix : on conserve les deux 2.}}$

On note G_2 le gain global correspondant à ce deuxième choix.
Le gain d'ores et déjà acquis est de 2 points ($G_2 \geq 2$).

On relance deux dés. On doit distinguer deux situations :

- On obtient un double *a* (avec $a \neq 2$) : le gain total sera alors de $2+a$ points ;
- On obtient deux faces distinctes (l'une d'elles pouvant être un 2) ou un double 2 : on ne marque pas de point supplémentaire et le gain total sera de 2 points.

En lançant deux dés, le nombre total de possibilités (issues) s'élève à $20^2 = 400$.
Chaque double a la probabilité $\dfrac{1}{400}$ d'apparaître.

La loi de probabilité du gain G_2 est donc :

g	2	$2+1$	$2+3$	$\ldots$	$2+19$	$2+20$
$p(G_2 = g)$	$1-\dfrac{19}{400}$	$\dfrac{1}{400}$	$\dfrac{1}{400}$		$\dfrac{1}{400}$	$\dfrac{1}{400}$

On peut alors calculer l'espérance de G_2 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_2) &= \frac{1}{400}\left((400-19)\times 2+\underbrace{(2+1)+(2+3)+\cdots+(2+19)+(2+20)}_{19\text{ termes}}\right)\\
&= \frac{1}{400}\left(400\times 2\cancel{-19\times 2}+\cancel{2\times 19}+(1+3+\cdots+19+20)\right)\\
&= \frac{1}{400}\left(800+(1+2+3+\cdots+19+20)-2\right)\\
&= \frac{1}{400}\left(800+\frac{20\times 21}{2}-2\right)\\
&= \frac{1}{400}(800+210-2)\\
&= \frac{1\ 008}{400}\\
&= \frac{63}{25}\\
&= 2{,}52
\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(\mathrm{G}_2)=2{,}52$$

Le second choix est moins favorable (en moyenne) que le premier. Ce résultat découle principalement du fait que le double conservé est un double 2. Si nous avions obtenu ne serait-ce qu'un double 3, la conclusion eut été inversée.

3ème choix : on conserve le 11.

On note G_3 le gain global correspondant à ce troisième choix.

En lançant trois dés, le nombre total de possibilités (issues) s'élève à $20^3=8\ 000$.

Les situations gagnantes sont les suivantes :

- On obtient un deuxième 11 exactement et deux faces distinctes : le gain total sera de 11 points ;
- On obtient un deuxième 11 exactement et un double *a* ($a\neq 11$) : le gain total sera de $11+a$ points ;
- On obtient deux autres 11 exactement et une quatrième face distincte : le gain total sera de 11 points ;
- On obtient trois autres 11 : le gain total sera de 11 points ;
- On n'obtient pas d'autre 11 mais on obtient un double *a* ($a\neq 11$) : le gain total sera de *a* points ;
- On n'obtient pas d'autre 11 mais on obtient un triple *a* ($a\neq 11$) : le gain total sera de *a* points.

La dernière situation type correspond à quatre faces distinctes et est une situation perdante.

Pour obtenir l'espérance cherchée, nous pouvons procéder de plusieurs façons : nous pouvons, par exemple, passer en revue les situations gagnantes décrites précédemment ; nous pouvons également nous inspirer de la démarche des questions 2 et 3.

Nous développons ci-dessous ces deux approches.

Déterminons, pour chacune des situations mentionnées ci-dessus, le nombre de possibilités correspondantes.

→ Nous avons $\binom{3}{1}=3$ possibilités pour le deuxième 11. Pour chacune d'elle, nous avons 19×18 possibilités pour les deux autres faces. Soit un total de $3\times 19\times 18$ possibilités. Chacune de ces possibilités conduit à un gain de 11 points.

→ Nous avons encore 3 possibilités pour le deuxième 11. Pour chacune d'elle, nous avons 19 doubles possibles. Il y a donc 3 possibilités pour le gain de $11+a$ points ($a\neq 11$) et 19 gains de ce type.

→ Nous avons $\binom{3}{2}=3$ possibilités pour les deux autres 11. Pour chacune d'elles, nous avons 19 possibilités pour la quatrième face. Soit un total de 3×19 possibilités. Chacune de ces possibilités conduit à un gain de 11 points.

→ Nous avons une seule possibilité pour obtenir trois autres 11. Le gain sera alors de 11 points.

→ Pour le double *a*, nous avons 19 possibilités. Pour un double *a* donné, nous avons $\binom{3}{2}=3$ possibilités de l'obtenir avec les trois dés. Enfin, nous avons 18 possibilités pour le dernier dé. On obtient ainsi un total de 3×18 possibilités conduisant *chacune* à un gain de *a* points. Cette situation (un et un seul double qui n'est pas le double 11) doit naturellement être rapprochée de la première situation décrite).

→ Enfin, il y a 19 triples *a* ($a\neq 11$) possibles et une seule possibilité pour chacun ! Chacun de ces 19 triples conduit à un gain de *a* points.

L'espérance de G_3 peut alors être calculée :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) &= \frac{1}{8\ 000}\left(3\times19\times18\times11+3\times\sum_{a\neq11}(11+a)+3\times19\times11+11+3\times18\times\sum_{a\neq11}a+\sum_{a\neq11}a\right)\\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(11\ 286+3\times19\times11+3\times\sum_{a\neq11}a+3\times19\times11+11+3\times18\times\sum_{a\neq11}a+\sum_{a\neq11}a\right)\\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(11\ 286+2\times3\times19\times11+11+(3+3\times18+1)\times\sum_{a\neq11}a\right)\\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(11\ 286+1265+58\times\left(\sum_{a=1}^{20}a-11\right)\right)\\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(11\ 286+1265-638+58\times\frac{20\times21}{2}\right)\\
&= \frac{24\ 093}{8\ 000}\\
&= 3{,}011\ 625
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{G}_3)=\frac{24\ 093}{8\ 000}=3{,}011\ 625}$$

En s’inspirant des questions 2 et 3, on procède de la façon suivante :

On considère un entier a compris entre 1 et 20 et on va introduire la variable aléatoire N_a prenant comme valeur le nombre de « a » finalement obtenus.

On aura alors : $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3)=\sum_{a=1}^{20}a\times p(\mathrm{N}_a\geq2)$.

(Par rapport à la question 3, la probabilité $p(\mathrm{N}_a\geq2)$ correspond à $p(\mathrm{X}_a=1)$)

Puisque nous conservons un « 11 », nous devons distinguer deux cas selon que l’entier a est ou non égal à 11 :

→ $a=11$

Puisque nous conservons le « 11 » déjà obtenu, la variable aléatoire N_{11} peut prendre les valeurs 1, 2, 3 et 4. Nous cherchons $p(\mathrm{N}_{11}\geq2)$.

On a : $p(\mathrm{N}_{11}\geq2)=1-p(\mathrm{N}_{11}<2)=1-p(\mathrm{N}_{11}=1)$. Il nous suffit donc ici de déterminer $p(\mathrm{N}_{11}=1)$.

L'événement « $N_{11}=1$ » est réalisé lorsque le « 11 » n'apparaît pas parmi les 3 dès relancés. Le nombre de possibilités correspondant vaut : 19^3 (19 possibilités pour chacun des 3 dès). Il vient alors : $p(N_{11}=1)=\frac{19^3}{20^3}=\frac{6\ 859}{8\ 000}$ et $1-p(N_{11}=1)=\frac{6\ 859}{8\ 000}=\frac{1\ 141}{8\ 000}$.

$p(N_{11}\geq 2)=\frac{1\ 141}{8\ 000}$.

→ $a\neq 11$

Puisque nous conservons le « 11 » déjà obtenu, la variable aléatoire N_a peut prendre les valeurs 1, 2 et 3. Nous cherchons $p(N_a\geq 2)$.

On a : $p(N_a\geq 2)=1-p(N_a<2)=1-p(N_a=0)-p(N_a=1)$. Il nous suffit donc ici de déterminer $p(N_a=0)$ et $p(N_a=1)$ (remarquons que l'on peut également partir de l'égalité : $p(N_a\geq 2)=p(N_a=2)+p(N_a=3)$).

L'événement « $N_a=0$ » est réalisé lorsque le « a » n'apparaît pas parmi les 3 dès relancés. Le nombre de possibilités correspondant vaut : 19^3 (19 possibilités pour chacun des 3 dès relancés). Il vient alors : $p(N_a=0)=\frac{19^3}{20^3}=\frac{6\ 859}{8\ 000}$.

L'événement « $N_a=1$ » est réalisé lorsque le « a » apparaît exactement une fois parmi les 3 dès relancés. Le nombre de possibilités correspondant vaut : $\binom{3}{1}\times 19^2=3\times 19^2$ (pour chacun des 3 dès pouvant prendre la valeur « a », il y a 19^2 possibilités pour les deux autres dès). Il vient alors : $p(N_a=1)=\frac{3\times 19^2}{20^3}=\frac{1\ 083}{8\ 000}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}p(N_a\geq 2)&=1-p(N_a=0)-p(N_a=1)\\&=1-\frac{6\ 859}{8\ 000}-\frac{1\ 083}{8\ 000}\\&=\frac{58}{8\ 000}\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) &= \sum_{a=1}^{20} a \times p(\mathrm{N}_a \geq 2) \\
&= 11 \times p(\mathrm{N}_{11} \geq 2) + \sum_{\substack{a=1,20 \\ a \neq 11}} a \times p(\mathrm{N}_a \geq 2) \\
&= 11 \times \frac{1\,141}{8\,000} + \sum_{\substack{a=1,20 \\ a \neq 11}} a \times \frac{58}{8\,000} \\
&= 11 \times \frac{1\,141}{8\,000} - 11 \times \frac{58}{8\,000} + \sum_{a=1}^{20} a \times \frac{58}{8\,000} \\
&= \frac{11\,913}{8\,000} + \frac{58}{8\,000} \sum_{a=1}^{20} a \\
&= \frac{11\,913}{8\,000} + \frac{58}{8\,000} \times \frac{20 \times 21}{2} \\
&= \frac{11\,913}{8\,000} + \frac{12\,180}{8\,000} \\
&= \frac{24\,093}{8\,000}
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi le résultat obtenu précédemment.

Dans la situation proposée, on a donc intérêt à conserver le 11 et à relancer trois dés. Le gain moyen espéré sera alors d'environ 3 points.

6. Dans la situation $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, nous ne marquons pas de point. Toute initiative conduit donc : soit à ne rien marquer, soit à gagner des points.

   → Si on relance les quatre dés (nous notons G_4 le gain correspondant à ce choix), on peut, d'après la question 3, espérer un gain moyen d'environ 2,94 points.

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{G}_4) = 2{,}943\,937\,5}$$

   → Supposons maintenant que nous conservions un dé. (nous notons G_3 le gain correspondant à ce choix).

   Le dernier calcul effectué à la question précédente va nous être utile et peut être facilement généralisé. Nous le reprenons en remplaçant 11 par *x*.

   On obtient immédiatement :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) &= \sum_{a=1}^{20} a \times p(\mathrm{N}_a \geq 2) \\
&= x \times p(\mathrm{N}_x \geq 2) + \sum_{\substack{a=1,20 \\ a \neq x}} a \times p(\mathrm{N}_a \geq 2) \\
&= x \times \frac{1\,141}{8\,000} + \sum_{\substack{a=1,20 \\ a \neq x}} a \times \frac{58}{8\,000} \\
&= x \times \frac{1\,141}{8\,000} - x \times \frac{58}{8\,000} + \sum_{a=1}^{20} a \times \frac{58}{8\,000} \\
&= \frac{1\,083x}{8\,000} + \frac{58}{8\,000} \sum_{a=1}^{20} a \\
&= \frac{1\,083x}{8\,000} + \frac{58}{8\,000} \times \frac{20 \times 21}{2} \\
&= \frac{1\,083x}{8\,000} + \frac{12\,180}{8\,000} \\
&= \frac{1\,083x + 12\,180}{8\,000}
\end{aligned}
$$

Ainsi, en conservant un dé et en en relançant trois, l'espérance du gain croît linéairement avec la valeur du dé conservé. Si nous sommes dans la situation initiale où l'on a : $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$, on aura : $a_1 \geq 4$ et donc :

$$\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) = \frac{1}{8\,000}(1\,083x + 12\,180) \geq \frac{1}{8\,000}(1\,083 \times 4 + 12\,180) = 2{,}064$$

Ce gain moyen est d'autant plus élevé que x l'est On a donc ici intérêt à conserver a_1 :

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) = \frac{1}{8\,000}(1\,083a_1 + 12\,180)}$$

→ Supposons maintenant que l'on relance deux dés (nous notons G_2 le gain correspondant à ce choix).

Ce choix peut conduire à des points non nuls si on obtient, in fine, un ou deux doubles. Le gain sera potentiellement d'autant plus élevés que nous aurons conservé des valeurs élevées. Nous gardons donc les dés correspondant à a_1 et a_2.

Les situations favorables sont alors les suivantes :

- On obtient a_1 mais pas a_2 : on marque a_1 points ;
- On obtient a_2 mais pas a_1 : on marque a_2 points ;
- On obtient a_1 et a_2 : on marque $a_1 + a_2$;

- On obtient un double a ($a \neq a_1$ et $a \neq a_2$) : on marque a points.

Déterminons, pour chacune de ces situations le nombre de cas favorables.

Pour le dé donnant a_1, nous avons 2 possibilités. Pour le deuxième dé, nous avons alors 19 possibilités (n'importe quelle valeur différente de a_2). En comptant de la sorte, nous avons compté deux fois le résultat $a_1 - a_1$. In fine, il y a : $2 \times 19 - 1 = 37$ situations nous conduisant à un gain de a_1 points.

La deuxième situation favorable se traite comme la précédente et on conclut qu'il y a 37 situations conduisant à un gain de a_2 points.

La troisième situation favorable correspond à $a_1 - a_2$ ou $a_2 - a_1$, soit deux situations conduisant à un gain de $a_1 + a_2$ points.

Pour la dernière situation favorable, il y a 18 doubles $a - a$ possibles (différents de $a_1 - a_1$ et $a_2 - a_2$), un double $a - a$ donné conduisant à un gain de a points.

L'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{G}_2)$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_2) &= \frac{1}{400}\left(37a_1 + 37a_2 + 2\times(a_1 + a_2) + \sum_{a \neq a_1, a \neq a_2} a\right) \\
&= \frac{1}{400}\left(39a_1 + 39a_2 + \sum_{a=1}^{20} a - (a_1 + a_2)\right) \\
&= \frac{1}{400}\left(38a_1 + 38a_2 + \frac{20\times 21}{2}\right) \\
&= \frac{1}{200}(19a_1 + 19a_2 + 105)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{G}_2) = \frac{1}{200}(19a_1 + 19a_2 + 105)}$$

→ Supposons enfin que l'on relance un dé (nous notons G_1 le gain correspondant à ce choix).

Les seules situations gagnantes sont les situations où l'une des trois faces conservées apparaît une deuxième fois. On a donc intérêt à conserver les trois faces les plus élevées : a_1, a_2 et a_3. On relance le dé correspondant à a_4.

- Si a_1 sort (probabilité $\frac{1}{20}$), on marque a_1 points ;

- Si a_2 sort (probabilité $\frac{1}{20}$), on marque a_2 points ;
- Si a_3 sort (probabilité $\frac{1}{20}$), on marque a_3 points ;
- Dans toutes les autres situations (probabilité $\frac{17}{20}$) on ne marque rien.

Il vient immédiatement :

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{G}_1)=\frac{1}{20}(a_1+a_2+a_3)}$$

En résumé, les espérances de gain sont les suivantes :

Choix	**Espérance de gain**
On relance les quatre dés	$\mathrm{E}(\mathrm{G}_4)=2{,}943\ 937\ 5$
On conserve le dé de valeur la plus élevée (a_1) et on relance les trois autres dés.	$\mathrm{E}(\mathrm{G}_3)=\frac{1}{8\ 000}(1\ 083a_1+12\ 180)$
On conserve les deux dés de valeurs les plus élevées (a_1 et a_2) et on relance les deux autres dés.	$\mathrm{E}(\mathrm{G}_2)=\frac{1}{200}(19a_1+19a_2+105)$
On relance le dé de valeur la plus faible (a_4) et on conserve les trois autres.	$\mathrm{E}(\mathrm{G}_1)=\frac{1}{20}(a_1+a_2+a_3)$

Pour comparer ces espérances, nous devons garder présente à notre esprit l'inégalité :

$$a_1>a_2>a_3>a_4$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(\mathrm{G}_1)\geq\mathrm{E}(\mathrm{G}_4)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{20}(a_1+a_2+a_3)\geq 2{,}943\ 937\ 5\\ \Leftrightarrow\ &a_1+a_2+a_3\geq 58{,}878\ 75\end{aligned}$$

Or, on a : $a_1+a_2+a_3\leq 20+19+18=57$.

Pour toute situation « $a_1>a_2>a_3>a_4$ », on aura toujours : $\mathrm{E}(\mathrm{G}_1)<\mathrm{E}(\mathrm{G}_4)$.
Conserver trois dés n'est donc pas intéressant.

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) \geq \mathrm{E}(\mathrm{G}_4) \\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{8\ 000}\left(1\ 083a_1 + 12\ 180\right) \geq 2{,}943\ 937\ 5 \\
\Leftrightarrow\ &1\ 083a_1 + 12\ 180 \geq 23\ 551{,}5 \\
\Leftrightarrow\ &1\ 083a_1 \geq 11\ 371{,}5 \\
\Leftrightarrow\ &a_1 \geq 10{,}5
\end{aligned}$$

Conserver le dé de valeur la plus élevée est plus intéressant que tout rejouer dès lors que cette valeur est au moins égale à « 11 ».

On a également :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_2) &= \frac{1}{8\ 000}\left(1\ 083a_1 + 12\ 180\right) - \frac{1}{200}\left(19a_1 + 19a_2 + 105\right) \\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(1\ 083a_1 + 12\ 180 - 760a_1 - 760a_2 - 4\ 200\right) \\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(323a_1 - 760a_2 + 7\ 980\right) \\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(323(a_1 - a_2) - 437a_2 + 7\ 980\right)
\end{aligned}$$

Comme $a_1 > a_2$, la différence $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_2)$ sera minimale pour : $a_1 - a_2 = 1$ et $a_2 = 19$.

On obtient alors : $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_2) = \frac{1}{8\ 000}\left(323 \times 1 - 437 \times 19 + 7\ 980\right) = 0$.

On en déduit finalement : $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_2) \geq 0$, soit $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) \geq \mathrm{E}(\mathrm{G}_2)$.

Dans tous les cas, il vaut mieux conserver le dé de valeur la plus élevé que les deux dés de valeurs les plus élevées.

La solution consistant à conserver les deux dés de valeurs les plus élevées semblent être particulièrement intéressante. Comparons donc maintenant : $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3)$ et $\mathrm{E}(\mathrm{G}_1)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_1) &= \frac{1}{8\ 000}\left(1\ 083a_1 + 12\ 180\right) - \frac{1}{20}\left(a_1 + a_2 + a_3\right) \\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(1\ 083a_1 + 12\ 180 - 400a_1 - 400a_2 - 400a_3\right) \\
&= \frac{1}{8\ 000}\left(683a_1 - 400(a_2 + a_3) + 12\ 180\right)
\end{aligned}$$

Le terme négatif sera d'autant plus élevé (en valeur absolue) que a_2 et a_3 seront proches.
Avec $a_3 = a_2 - 1$, il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_1) &= \frac{1}{8\ 000}\left(683a_1 - 400(a_2 + a_2 - 1) + 12\ 180\right) \\ &= \frac{1}{8\ 000}\left(683a_1 - 800a_2 + 12\ 580\right) \\ &= \frac{1}{8\ 000}\left(683(a_1 - a_2) - 117a_2 + 12\ 580\right) \end{aligned}$$

Comme $a_1 > a_2$, la différence $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_1)$ sera minimale alors pour : $a_1 - a_2 = 1$ et $a_2 = 19$. On obtient alors : $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_1) = \dfrac{1}{8\ 000}\left(683 - 117 \times 19 + 12\ 580\right) > 0$.
On en déduit finalement : $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) - \mathrm{E}(\mathrm{G}_1) > 0$, soit $\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) > \mathrm{E}(\mathrm{G}_1)$.

En définitive, nous avons :

$$\mathrm{E}(\mathrm{G}_3) \geq \mathrm{E}(\mathrm{G}_2),\ \mathrm{E}(\mathrm{G}_3) > \mathrm{E}(\mathrm{G}_1) \text{ et } \mathrm{E}(\mathrm{G}_3) \geq \mathrm{E}(\mathrm{G}_4) \Leftrightarrow a_1 \geq 11$$

On en conclut :

- Si $a_1 \geq 11$, on conserve le dé « a_1 » et on relance les trois autres ;
- Si $a_1 < 11$, on conserve les deux dés « a_1, a_2 » et on relance les deux autres.