

# Concours général de mathématiques

2010

## Exercice 3 (Problème) – Corrigé

### Quelques éléments mathématiques utiles

Nous fournissons/rappelons ici quelques résultats utiles pour la résolution de ce problème.

- Pour tout couple  $(x, y)$  de réels :

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$xy = \frac{1}{4} \left[ (x + y)^2 - (x - y)^2 \right]$$

- Pour tout triplet  $(x, y, z)$  de réels :

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz .$$

### Préambule

La question 1. (a) en particulier nous pousse d'emblée à réfléchir au cadre probabiliste retenu dans ce problème.

La population initiale étudiée est finie et comporte  $N$  cellules dont  $N_A$ ,  $N_B$  et  $N_C$  cellules de types A, B et C respectivement (on a donc :  $N_A + N_B + N_C = N$ ). On peut ainsi modéliser la situation à l'aide d'une urne comportant des boules indiscernables au toucher mais de couleurs différentes.

En toute rigueur, le choix de trois cellules au hasard équivaut alors à choisir successivement et sans remise, trois boules dans l'urne. Mais alors chaque tirage modifie les proportions des différents types de boules (cellules).

Ce n'est pas le modèle retenu ici.

En fait, lorsque  $N$  est grand, on peut considérer que l'on effectue les tirages avec remise. Ainsi, les proportions ne varient pas.

L'expérience peut être alors modélisée à l'aide de dés pipés à trois faces (oui, oui ! On peut imaginer de tels dés ...) notées  $A$ ,  $B$  et  $C$  et dont les probabilités d'apparition valent respectivement  $a$ ,  $b$  et  $c$ . C'est ce modèle qui est retenu ici.

### Corrigé

1. (a) Trois cellules prises au hasard sont compatibles si, et seulement si, deux d'entre elles au moins sont de la même espèce. Nous notons alors  $CC$  l'événement :

« Les trois cellules sont compatibles »

A contrario, si les trois cellules sont d'espèces différentes, elles ne seront pas compatibles. Ainsi, on va s'intéresser à l'événement contraire de  $CC$  à savoir :

« Les trois cellules sont incompatibles »

On a classiquement :  $p(\overline{CC}) = 1 - p(CC) = 1 - p$ .

Les issues qui réalisent l'événement  $\overline{CC}$  sont les 6 issues :

$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB$  et  $CBA$

Ces issues ont toutes la même probabilité de réalisation :  $abc$  et il vient :

$$p(\overline{CC}) = 1 - p = p(ABC) + p(ACB) + p(BAC) + p(BCA) + p(CAB) + p(CBA) = 6abc$$

L'égalité :  $1 - p = 6abc$  nous donne alors immédiatement :

$$\boxed{p = 1 - 6abc}$$

(b) Soit, comme suggéré dans l'énoncé,  $c$  fixé.

Le cas  $c = 0$  présente peu d'intérêt : on a immédiatement  $p = 1 > \frac{7}{9}$ . Nous supposons donc dans la suite :  $c > 0$ .

La probabilité  $p = 1 - 6abc$  est alors fonction des deux variables  $a$  et  $b$ .

Mais on a la relation :  $a + b + c = 1$ . On peut donc remplacer  $b$  par :  $1 - a - c$  et il vient :

$$p = 1 - 6abc = 1 - 6ac(1 - a - c) = 6ca^2 - 6c(1 - c)a + 1$$

On obtient ainsi une expression polynômiale de degré 2 en  $a$  ( $6c \neq 0$ ).

Comme  $a$  et  $b$  sont compris entre 0 et 1 et que l'on a  $a + b = 1 - c$ , la variable  $a$  peut en fait varier entre 0 et  $1 - c$  (il en va de même pour  $b$ ).

Posons alors :  $f(a) = 6ca^2 - 6c(1-c)a + 1$  avec  $a \in [0; 1-c]$ .

Le coefficient de «  $a^2$  » étant strictement positif, cette fonction admet un minimum pour la valeur de  $a$  annulant la dérivée  $f'$ . Or,  $f'(a) = 12ca - 6c(1-c) = 6c[2a - (1-c)]$ .

D'où :  $f'(a) = 0 \Leftrightarrow 6c[2a - (1-c)] = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1-c}{2} \in [0; 1-c]$ .

La valeur minimale de  $f$  vaut alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1-c}{2}\right) &= 6c\left(\frac{1-c}{2}\right)^2 - 6c(1-c)\left(\frac{1-c}{2}\right) + 1 \\ &= 6c\frac{(1-c)^2}{4} - 6c\frac{(1-c)^2}{2} + 1 \\ &= 1 - 6c\frac{(1-c)^2}{4} \\ &= 1 - \frac{3}{2}c(1-c)^2 \end{aligned}$$

Notre première conclusion est alors la suivante :

$$\text{Pour } c \text{ fixé, la probabilité } p \text{ est supérieure à } 1 - \frac{3}{2}c(1-c)^2.$$

Remarque : l'inégalité  $p \geq 1 - \frac{3}{2}c(1-c)^2$  est encore valable pour  $c = 0$ . On va donc s'intéresser à la fonction  $\varphi$  définie sur l'intervalle  $[0; +1]$  par :

$$\varphi : c \mapsto 1 - \frac{3}{2}c(1-c)^2$$

Il s'agit d'une fonction polynôme de degré 3 et on a facilement, pour tout réel  $c$  de l'intervalle  $[0; +1]$  :

$$\varphi'(c) = -\frac{3}{2}[(1-c)^2 - 2c(1-c)] = -\frac{3}{2}(1-c)[(1-c) - 2c] = -\frac{3}{2}(1-c)(1-3c)$$

La dérivée  $\varphi'$  s'annule donc pour  $c = \frac{1}{3}$  et  $c = 1$ .

Comme  $c \leq 1$ , on a immédiatement  $1 - c \geq 0$  et  $-\frac{3}{2}(1-c) \leq 0$ .

Puis :  $1 - 3c > 0 \Leftrightarrow c < \frac{1}{3}$ .

En définitive :

- Pour tout  $c$  dans  $\left[0; +\frac{1}{3}\right]$ ,  $\varphi'(c) < 0$  ;
- Pour tout  $c$  dans  $\left] +\frac{1}{3}; +1 \right]$ ,  $\varphi'(c) > 0$  ;
- $\varphi'\left(\frac{1}{3}\right) = \varphi'(1) = 0$ .

La fonction  $\varphi$  est donc strictement décroissante sur l'intervalle  $\left[0; +\frac{1}{3}\right]$  et strictement croissante sur l'intervalle  $\left] +\frac{1}{3}; +1 \right]$ . Elle admet donc un minimum global strict en  $\frac{1}{3}$ .

Ce minimum vaut :

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Finalement :  $\forall c \in [0; +1], \varphi(c) \geq \frac{7}{9}$ .

$$\boxed{p \geq \frac{7}{9}}$$

## 2. Etude du premier scénario.

Nous travaillons avec des cellules appartenant à la génération  $n$  et notons alors DA l'événement :

« La descendance est de type A »

D'après l'énoncé, nous cherchons :  $a_{n+1} = p(\text{DA} | \text{CC}) = \frac{p(\text{DA} \cap \text{CC})}{p(\text{CC})}$ .

D'après la question 1. (a), on a immédiatement :  $p(\text{CC}) = 1 - 6a_n b_n c_n$ .

D'après l'hypothèse faite dans le cadre de ce premier scénario, l'événement  $\text{DA} \cap \text{CC}$  sera réalisé par toute issue comportant au moins deux fois la lettre A :

- AAA de probabilité  $a_n^3$  ;
- BAA, ABA, AAB, CAA, ACA et AAC ; les trois premières de probabilité  $a_n^2 b_n$ , les trois dernières de probabilité  $a_n^2 c_n$ .

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 p(\text{DA} \cap \text{CC}) &= a_n^3 + 3a_n^2b_n + 3a_n^2c_n \\
 &= a_n^2[a_n + 3b_n + 3c_n] \\
 &= a_n^2[a_n + 3(b_n + c_n)] \\
 &= a_n^2[a_n + 3(1 - a_n)] \\
 &= a_n^2(3 - 2a_n)
 \end{aligned}$$

En définitive :

$$a_{n+1} = p(\text{DA} | \text{CC}) = \frac{p(\text{DA} \cap \text{CC})}{p(\text{CC})} = \frac{a_n^2(3 - 2a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

Le résultat est ainsi établi.

Le raisonnement mené ci-dessus reste valable pour obtenir  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  et on obtient, en permutant les lettres «  $a$  », «  $b$  » et «  $c$  » :

$a_{n+1} = \frac{a_n^2(3 - 2a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$	$b_{n+1} = \frac{b_n^2(3 - 2b_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$	$c_{n+1} = \frac{c_n^2(3 - 2c_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}$
--	--	--

(b) On a :  $a_0 > b_0 > c_0$ .

Considérons la propriété  $\mathcal{P}_n$  : «  $a_n > b_n > c_n$  » et menons un raisonnement par récurrence pour établir qu'elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

#### Initialisation.

Par hypothèse, on a :  $a_0 > b_0 > c_0$ . La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.

#### Hérédité.

Soit  $n$  un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie, c'est-à-dire :  $a_n > b_n > c_n$ .

D'après les expressions de  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  obtenues à la question précédente, la comparaison de ces réels se ramène à la comparaison des numérateurs.

Introduisons la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0; +1]$  par :  $\varphi : x \mapsto x^2(3 - 2x) = -2x^3 + 3x^2$ .

$$\text{On a alors : } a_{n+1} = \frac{\varphi(a_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}, \quad b_{n+1} = \frac{\varphi(b_n)}{1 - 6a_nb_nc_n} \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{\varphi(c_n)}{1 - 6a_nb_nc_n}.$$

En tant que fonction polynôme  $\varphi$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +1]$  et on a :

$$\forall x \in [0; +1], \varphi'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(1-x)$$

La dérivée s'annule en 0 et en 1 et on a :  $\forall x \in ]0; +1[, \varphi'(x) > 0$ . On en déduit que la fonction  $\varphi$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0; +1]$ .

D'où :  $a_n > b_n > c_n \Leftrightarrow \varphi(a_n) > \varphi(b_n) > \varphi(c_n) \Leftrightarrow a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$ .

La propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie. La propriété  $\mathcal{P}_n$  est héréditaire.

En définitive :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n > b_n > c_n}$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $a_n > b_n > c_n$ , d'où :  $a_n > b_n$  et  $a_n > c_n$ .

On en tire alors :  $2a_n > b_n + c_n$  puis :  $2a_n + a_n > b_n + c_n + a_n$ , soit :  $3a_n > 1$ .

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n > \frac{1}{3}}$$

En raisonnant de façon analogue, on a :  $a_n > b_n > c_n$ , d'où :  $c_n < b_n$  et  $c_n < a_n$ .

On en tire alors :  $2c_n < a_n + b_n$  puis :  $2c_n + c_n < a_n + b_n + c_n$ , soit :  $3c_n < 1$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, c_n < \frac{1}{3}}$$

Pour établir :  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n < \frac{1}{2}$ , on peut raisonner par l'absurde et supposer que pour un

rang  $N$  on a :  $b_N \geq \frac{1}{2}$ .

Comme :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > b_n$ , on a donc :  $a_N > b_N \geq \frac{1}{2}$ .

On en tire alors :  $a_N + b_N > 1$  ce qui est absurde puisque l'égalité  $a_N + b_N + c_N = 1$  entraîne, les trois termes de la somme étant positifs :  $a_N + b_N \leq 1$ .

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, b_n < \frac{1}{2}}$$

(c) D'après la question 2. (a), on a, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} - b_{n+1} &= \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n} - \frac{b_n^2(3-2b_n)}{1-6a_nb_nc_n} \\
 &= \frac{3(a_n^2 - b_n^2) - 2(a_n^3 - b_n^3)}{1-6a_nb_nc_n} \\
 &= \frac{3(a_n - b_n)(a_n + b_n) - 2(a_n - b_n)(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2)}{1-6a_nb_nc_n} \\
 &= (a_n - b_n) \frac{3(a_n + b_n) - 2(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2)}{1-6a_nb_nc_n} \\
 &= (a_n - b_n) \frac{3(a_n + b_n) - 2[(a_n + b_n)^2 - a_nb_n]}{1-6a_nb_nc_n} \\
 &= (a_n - b_n) \frac{3(a_n + b_n) - 2(a_n + b_n)^2 + 2a_nb_n}{1-6a_nb_nc_n} \\
 &= (a_n - b_n) \frac{3(1-c_n) - 2(1-c_n)^2 + 2a_nb_n}{1-6a_nb_nc_n} \\
 &= (a_n - b_n) \frac{1+c_n - 2c_n^2 + 2a_nb_n}{1-6a_nb_nc_n}
 \end{aligned}$$

Comme  $a_n > b_n$ , on tire de ce qui précède :

$$\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = \frac{1+c_n - 2c_n^2 + 2a_nb_n}{1-6a_nb_nc_n} = \frac{1+c_n(1-2c_n) + 2a_nb_n}{1-6a_nb_nc_n}$$

Comme :  $0 \leq c_n < \frac{1}{3}$ , on a :  $1-2c_n > \frac{1}{3} > 0$  et  $c_n(1-2c_n) \geq 0$ .

Les réels  $a_n$  et  $b_n$  étant strictement positifs, on a :  $c_n(1-2c_n) + 2a_nb_n > 0$  et, finalement :

$$1 + c_n(1-2c_n) + 2a_nb_n > 1.$$

Par ailleurs :  $0 < 1-6a_nb_nc_n \leq 1$ .

On en déduit finalement :  $\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} > 1$ .

La suite  $(a_n - b_n)$  est donc strictement croissante.

En menant un calcul similaire au précédent, on obtient :

$$\frac{a_{n+1} - c_{n+1}}{a_n - c_n} = \frac{1+b_n(1-2b_n) + 2a_nc_n}{1-6a_nb_nc_n}$$

L'inégalité  $0 < b_n < \frac{1}{2}$  (cf. la question précédente) nous permet encore de conclure

$$1 + b_n(1 - 2b_n) + 2a_n c_n > 1 \text{ puis : } \frac{a_{n+1} - c_{n+1}}{a_n - c_n} > 1.$$

La suite  $(a_n - c_n)$  est donc strictement croissante.

En définitive :

Les suites  $(a_n - b_n)$  et  $(a_n - c_n)$  sont strictement croissantes.

(d) A la question précédente, nous avons établi que les suites  $(a_n - b_n)$  et  $(a_n - c_n)$  étaient croissantes.

A partir de  $0 \leq b_n \leq 1$  et  $0 \leq a_n \leq 1$ , il vient immédiatement :  $-1 \leq a_n - b_n \leq 1$  (nous n'avons pas besoin de plus de précision ici !).

La suite  $(a_n - b_n)$  est donc majorée ; comme elle est croissante, on en tire qu'elle converge.

En raisonnant de façon similaire, nous établissons que la suite  $(a_n - c_n)$  converge.

La somme de ces deux suites converge donc également.

$$\text{Or : } a_n - b_n + a_n - c_n = 2a_n - (b_n + c_n) = 2a_n - (1 - a_n) = 3a_n - 1.$$

La suite  $(3a_n - 1)$  est donc convergente (remarquons également qu'elle est croissante en tant que somme de deux suites croissantes). Il en va, in fine, de même pour la suite  $(a_n)$  (qui est également croissante).

Les suites  $(a_n)$  et  $(a_n - b_n)$  (respectivement  $(a_n - c_n)$ ) étant convergentes, il en va de même pour la suite différence qui n'est rien d'autre que la suite  $(b_n)$  (respectivement  $(c_n)$ ).

Finalement :

Les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  convergent.

Nous notons  $a$ ,  $b$  et  $c$  les limites respectives des suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$ .

Rappelons que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n + b_n + c_n = 1$ . En passant à la limite, il vient :

$$a + b + c = 1$$

Par ailleurs :  $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \geq a_n > b_n > c_n \geq 0$ . En passant à la limite, il vient :

$$1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$$

Enfin, pour tout entier naturel  $n$  :  $a_{n+1} = \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n}$ .

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n^2(3-2a_n)}{1-6a_nb_nc_n} = \frac{a^2(3-2a)}{1-6abc}$ .

On a donc l'égalité :  $\frac{a^2(3-2a)}{1-6abc} = a$ , soit :  $a \left[ \frac{a(3-2a)}{1-6abc} - 1 \right] = 0$ .

On ne retient pas la possibilité  $a = 0$  car alors, d'après  $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$ , on en conclurait  $a = b = c = 0$ , résultat en contradiction avec  $a + b + c = 1$ .

La limite  $a$  vérifie donc :  $\frac{a(3-2a)}{1-6abc} - 1 = 0$  soit :  $\boxed{1-6abc = a(3-2a)}$ .

En raisonnant comme précédemment, on établit :

$$\frac{b^2(3-2b)}{1-6abc} = b \text{ et } \frac{c^2(3-2c)}{1-6abc} = c$$

En tenant compte de l'égalité encadrée ci-dessus, ces égalités se récrivent :

$$\frac{b^2(3-2b)}{a(3-2a)} = b \text{ et } \frac{c^2(3-2c)}{a(3-2a)} = c$$

Intéressons-nous à la première égalité :  $\frac{b^2(3-2b)}{a(3-2a)} = b$ , soit :  $b \left[ \frac{b(3-2b)}{a(3-2a)} - 1 \right] = 0$ .

Deux possibilités sont envisageables :  $b = 0$  ou  $\frac{b(3-2b)}{a(3-2a)} - 1 = 0$  (qui implique  $b \neq 0$ ).

On a également :  $c = 0$  ou  $\frac{c(3-2c)}{a(3-2a)} - 1 = 0$ .

Quatre possibilités s'offrent à nous. Considérons-les successivement.

Peut-on avoir  $\frac{b(3-2b)}{a(3-2a)} - 1 = 0$  et  $\frac{c(3-2c)}{a(3-2a)} - 1 = 0$  ?

$$\begin{aligned}
& \frac{b(3-2b)}{a(3-2a)} - 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow b(3-2b) = a(3-2a) \\
& \Leftrightarrow b(3-2b) - a(3-2a) = 0 \\
& \Leftrightarrow 3(b-a) - 2(b^2 - a^2) = 0 \\
& \Leftrightarrow 3(b-a) - 2(b-a)(b+a) = 0 \\
& \Leftrightarrow (b-a)[3 - 2(b+a)] = 0 \\
& \Leftrightarrow (b-a)[3 - 2(1+c)] = 0 \\
& \Leftrightarrow (b-a)(1+2c) = 0
\end{aligned}$$

Comme :  $1+2c > 0$ , on en tire  $a = b$ .

En raisonnant de façon similaire à partir de  $\frac{c(3-2c)}{a(3-2a)} - 1 = 0$ , on a aussi :  $a = c$ .

D'où :  $a = b = c$ .

L'égalité  $a + b + c = 1$  nous donne alors immédiatement :  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

Mais on a vu :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > \frac{1}{3}$ . La suite  $(a_n)$  étant croissante, on ne peut donc avoir  $a = \frac{1}{3}$ .

Nous ne pouvons donc pas supposer que l'on a simultanément  $\frac{b(3-2b)}{a(3-2a)} - 1 = 0$  et  $\frac{c(3-2c)}{a(3-2a)} - 1 = 0$ .

On a donc :  $b = 0$  ou  $c = 0$ .

L'égalité  $1 - 6abc = a(3-2a)$  se réécrit alors :  $1 = a(3-2a)$ , soit :  $2a^2 - 3a + 1 = 0$ .

La somme des coefficients de cette équation étant nulle, 1 en est solution évidente et on a facilement :  $2a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(2a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$  ou  $a = \frac{1}{2}$ .

Peut-on avoir  $b = 0$  et  $\frac{c(3-2c)}{a(3-2a)} - 1 = 0$  ?

Dans ce cas, la seconde égalité conduit à  $a = c$  et comme  $a + b + c = 1$ , on aurait  $a = c = \frac{1}{2}$ , ce qui est absurde puisque l'inégalité  $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$  ne serait alors pas satisfaite.

Peut-on avoir  $\frac{b(3-2b)}{a(3-2a)} - 1 = 0$  et  $c = 0$  ?

Dans ce cas, la première égalité conduit à  $a = b$  et comme  $a + b + c = 1$ , on aurait  $a = b = \frac{1}{2}$ , ce qui semble, à priori sérieusement envisageable et apparemment compatible avec nos diverses contraintes sur les trois limites.

Nous avons cependant établi à la question 2. (c) que la suite  $(a_n - b_n)$  était croissante.

On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n - b_n \geq a_0 - b_0 > 0$ .

En passant à la limite, on obtient :  $a - b \geq a_0 - b_0 > 0$ .

Les limites  $a$  et  $b$  ne peuvent donc être égales ...

En définitive :  $b = c = 0$  et l'égalité  $a + b + c = 1$  donne  $a = 1$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$$

Interprétation du résultat obtenu : dans le cadre de ce premier scénario, la population ne contiendrait plus, à terme, que des cellules de type A.

### 3. Etude du second scénario.

Nous travaillons encore avec des cellules appartenant à la génération  $n$ .

Comme pour le premier scénario, nous cherchons :  $a_{n+1} = p(\text{DA} | \text{CC}) = \frac{p(\text{DA} \cap \text{CC})}{p(\text{CC})}$ .

D'après l'hypothèse faite dans le cadre du second scénario, l'événement  $\text{DA} \cap \text{CC}$  sera réalisé par toute issue comportant exactement trois fois la lettre A ou une fois la lettre A, les deux lettres étant identiques :

- AAA de probabilité  $a_n^3$  ;
- ABB, BAB, BBA, ACC, CAC et CCA ; les trois premières de probabilité  $a_n b_n^2$ , les trois dernières de probabilité  $a_n c_n^2$ .

Il vient alors :

$$\begin{aligned} p(\text{DA} \cap \text{CC}) &= a_n^3 + 3a_n b_n^2 + 3a_n c_n^2 \\ &= a_n (a_n^2 + 3b_n^2 + 3c_n^2) \end{aligned}$$

En définitive :

$$a_{n+1} = p(\text{DA} | \text{CC}) = \frac{p(\text{DA} \cap \text{CC})}{p(\text{CC})} = \frac{a_n (a_n^2 + 3b_n^2 + 3c_n^2)}{1 - 6a_n b_n c_n}$$

Le raisonnement mené ci-dessus reste valable pour obtenir  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  et on obtient, en permutant les lettres «  $a$  », «  $b$  » et «  $c$  » :

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2 + 3b_n^2 + 3c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n} \quad b_{n+1} = \frac{b_n(3a_n^2 + b_n^2 + 3c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n} \quad c_{n+1} = \frac{c_n(3a_n^2 + 3b_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n}}$$

(b) On a :  $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$ .

Considérons la propriété  $\mathcal{P}_n$  : «  $1 > a_n > b_n > c_n > 0$  » et menons un raisonnement par récurrence pour établir qu'elle est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

#### Initialisation.

Par hypothèse, on a :  $1 > a_0 > b_0 > c_0 > 0$ . La propriété  $\mathcal{P}_0$  est donc vraie.

#### Hérédité.

Soit  $n$  un entier naturel quelconque fixé.

On suppose que la propriété  $\mathcal{P}_n$  est vraie, c'est-à-dire :  $1 > a_n > b_n > c_n > 0$ .

D'après les expressions de  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  obtenues à la question précédente, la comparaison de ces réels se ramène à la comparaison des numérateurs.

Ainsi, pour comparer  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} a_n(a_n^2 + 3b_n^2 + 3c_n^2) - b_n(3a_n^2 + b_n^2 + 3c_n^2) &= a_n^3 + 3a_nb_n^2 + 3a_nc_n^2 - 3b_na_n^2 - b_n^3 - 3b_nc_n^2 \\ &= (a_n^3 - b_n^3) + 3a_nb_n(b_n - a_n) + 3c_n^2(a_n - b_n) \\ &= (a_n - b_n)[(a_n^2 + a_nb_n + b_n^2) + 3c_n^2 - 3a_nb_n] \\ &= (a_n - b_n)(a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2 + 3c_n^2) \\ &= (a_n - b_n)[(a_n - b_n)^2 + 3c_n^2] \end{aligned}$$

On a :  $(a_n - b_n)^2 + 3c_n^2 = 0 \Leftrightarrow a_n = b_n$  et  $c_n = 0$ . Or  $a_n \neq b_n$  et  $c_n \neq 0$  donc

$(a_n - b_n)^2 + 3c_n^2 \neq 0$  et, finalement  $(a_n - b_n)^2 + 3c_n^2 > 0$ .

Le signe de  $a_{n+1} - b_{n+1}$  est donc identique à celui de  $a_n - b_n$ . Comme  $a_n > b_n$ , on a finalement :  $a_{n+1} > b_{n+1}$ .

De façon tout à fait similaire, on montre que  $b_{n+1} > c_{n+1}$ .

On a donc, pour l'instant :  $a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1}$ .

Il convient maintenant d'établir :  $1 > a_{n+1}$  et  $c_{n+1} > 0$ .

On peut « travailler » l'expression du numérateur de  $a_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} a_n(a_n^2 + 3b_n^2 + 3c_n^2) &= (a_n + b_n + c_n)^3 - b_n^3 - c_n^3 - 3(b_n a_n^2 + b_n c_n^2 + c_n a_n^2 + c_n b_n^2) - 6a_n b_n c_n \\ &= (1 - 6a_n b_n c_n) - [b_n^3 + c_n^3 + 3(b_n a_n^2 + b_n c_n^2 + c_n a_n^2 + c_n b_n^2)] \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n(a_n^2 + 3b_n^2 + 3c_n^2)}{1 - 6a_n b_n c_n} \\ &= \frac{(1 - 6a_n b_n c_n) - [b_n^3 + c_n^3 + 3(b_n a_n^2 + b_n c_n^2 + c_n a_n^2 + c_n b_n^2)]}{1 - 6a_n b_n c_n} \\ &= 1 - \frac{b_n^3 + c_n^3 + 3(b_n a_n^2 + b_n c_n^2 + c_n a_n^2 + c_n b_n^2)}{1 - 6a_n b_n c_n} \end{aligned}$$

Comme  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  sont strictement positifs, on a immédiatement :

$$b_n^3 + c_n^3 + 3(b_n a_n^2 + b_n c_n^2 + c_n a_n^2 + c_n b_n^2) > 0$$

Et on en déduit :  $a_{n+1} < 1$ .

On a ensuite : 
$$c_{n+1} = \frac{c_n(3a_n^2 + 3b_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_n b_n c_n}.$$

Comme  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  sont strictement positifs, on a  $3a_n^2 + 3b_n^2 + c_n^2 > 0$  et  $c_n(3a_n^2 + 3b_n^2 + c_n^2) > 0$  donc :  $c_{n+1} > 0$ .

En définitive :  $1 > a_{n+1} > b_{n+1} > c_{n+1} > 0$ , la propriété  $\mathcal{P}_{n+1}$  est donc vraie.

La propriété  $\mathcal{P}_n$  est donc vraie pour tout entier naturel  $n$  :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 > a_n > b_n > c_n > 0}$$

(c) D'après la question (a), on a :  $c_{n+1} = \frac{c_n(3a_n^2 + 3b_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_n b_n c_n}$ . Or, d'après la question précédente, le réel  $c_n$  est strictement positif. On en déduit immédiatement :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3a_n^2 + 3b_n^2 + c_n^2}{1 - 6a_n b_n c_n}$$

En tenant compte de :  $a_n^2 + b_n^2 = (a_n + b_n)^2 - 2a_nb_n$  et  $a_n + b_n + c_n = 1$ , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{3a_n^2 + 3b_n^2 + c_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n} \\ &= \frac{3(a_n^2 + b_n^2) + c_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n} \\ &= \frac{3[(a_n + b_n)^2 - 2a_nb_n] + c_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n} \\ &= \frac{3[(1 - c_n)^2 - 2a_nb_n] + c_n^2}{1 - 6a_nb_nc_n} \\ &= \frac{3 - 6c_n + 4c_n^2 - 6a_nb_n}{1 - 6a_nb_nc_n} \end{aligned}$$

Nous constatons que, pour  $c_n$  donné, cette expression dépend fondamentalement du produit  $a_nb_n$  (et même de la quantité :  $-6a_nb_n$ ). Nous nous intéressons alors aux valeurs prises par ce produit.

Nous avons :  $1 > a_n > b_n > c_n > 0$  et  $a_n + b_n = 1 - c_n$ .

Il vient alors :  $a_n + b_n > b_n + b_n$ , soit :  $2b_n < 1 - c_n$  ou :  $b_n < \frac{1 - c_n}{2}$ .

Le réel  $b_n$  appartient donc à l'intervalle :  $\left] c_n; \frac{1 - c_n}{2} \right[$ .

Comme :  $-6a_nb_n = -6(1 - c_n - b_n)b_n$ , nous allons étudier les variations de la fonction  $\Phi$  définie sur  $\left] c_n; \frac{1 - c_n}{2} \right[$  par :  $\Phi : x \mapsto -6(1 - c_n - x)x = 6x^2 - 6(1 - c_n)x$ .

Le coefficient de «  $x^2$  » est strictement positif et on montre facilement que la fonction  $\Phi$  est strictement décroissante sur  $\left] c_n; \frac{1 - c_n}{2} \right[$ . On a donc :

$$\forall x \in \left] c_n; \frac{1 - c_n}{2} \right[, \Phi\left(\frac{1 - c_n}{2}\right) < \Phi(x) < \Phi(c_n)$$

On a :  $\Phi(c_n) = -6(1 - c_n - c_n)c_n = -6(1 - 2c_n)c_n$  et

$$\Phi\left(\frac{1 - c_n}{2}\right) = -6\left(1 - c_n - \frac{1 - c_n}{2}\right)\frac{1 - c_n}{2} = -6\left(\frac{1 - c_n}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2}(1 - c_n)^2.$$

Il vient donc :

$$\forall x \in \left] c_n; \frac{1-c_n}{2} \right[ , \quad -\frac{3}{2}(1-c_n)^2 < \Phi(x) < -6(1-2c_n)c_n$$

Soit :

$$-\frac{3}{2}(1-c_n)^2 < -6a_n b_n < -6(1-2c_n)c_n$$

Nous allons alors nous intéresser successivement au numérateur et au dénominateur de

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3-6c_n+4c_n^2-6a_n b_n}{1-6a_n b_n c_n}.$$

Pour ce qui est du numérateur, on a :

$$\begin{aligned} 3-6c_n+4c_n^2-6a_n b_n &> 3-6c_n+4c_n^2-\frac{3}{2}(1-c_n)^2 \\ \Leftrightarrow 3-6c_n+4c_n^2-6a_n b_n &> 3-6c_n+4c_n^2-\frac{3}{2}+3c_n-\frac{3}{2}c_n^2 \\ \Leftrightarrow 3-6c_n+4c_n^2-6a_n b_n &> \frac{3}{2}-3c_n+\frac{5}{2}c_n^2 \\ \Leftrightarrow 3-6c_n+4c_n^2-6a_n b_n &> f(c_n) \end{aligned}$$

Remarque : on vérifiera rapidement que la fonction  $f$  prend des valeurs strictement positives sur  $\mathbb{R}$  et en particulier sur  $\left] 0; \frac{1}{3} \right[$ .

Quant au dénominateur :

$$\begin{aligned} 1-6a_n b_n c_n &< 1-6(1-2c_n)c_n^2 \\ \Leftrightarrow 1-6a_n b_n c_n &< 1-6c_n^2+12c_n^3 \\ \Leftrightarrow 1-6a_n b_n c_n &< g(c_n) \end{aligned}$$

A partir de  $3-6c_n+4c_n^2-6a_n b_n > f(c_n) > 0$  et  $0 < 1-6a_n b_n c_n < g(c_n)$ , il vient :

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3-6c_n+4c_n^2-6a_n b_n}{1-6a_n b_n c_n} > \frac{f(c_n)}{g(c_n)}$$

L'inégalité (qui est en fait stricte) est ainsi établie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{c_{n+1}}{c_n} > \frac{f(c_n)}{g(c_n)}}$$

(d) Etudions la différence  $f(c_n) - g(c_n)$  sur l'intervalle  $]\frac{1}{3}; 1[$ .

On a d'abord :

$$\begin{aligned} f(c_n) - g(c_n) &= \frac{3}{2} - 3c_n + \frac{5}{2}c_n^2 - (1 - 6c_n^2 + 12c_n^3) \\ &= \frac{1}{2}(3 - 6c_n + 5c_n^2 - 2 + 12c_n^2 - 24c_n^3) \\ &= \frac{1}{2}(-24c_n^3 + 17c_n^2 - 6c_n + 1) \\ &= \frac{1}{2}h(c_n) \end{aligned}$$

Avec :  $h(c_n) = -24c_n^3 + 17c_n^2 - 6c_n + 1$ .

On a facilement :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}, x < \frac{1}{3}} h(c_n) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}, x < \frac{1}{3}} (-24c_n^3 + 17c_n^2 - 6c_n + 1) \\ &= -24\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 17\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6\frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{-24}{27} + \frac{17}{9} - 2 + 1 = \frac{-8}{9} + \frac{17}{9} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donc, en particulier, sur  $]\frac{1}{3}; 1[$ , en tant

que fonction polynôme et on a :  $h'(c_n) = -72c_n^2 + 34c_n - 6 = -2(36c_n^2 - 17c_n + 3)$

Le discriminant associé à  $36c_n^2 - 17c_n + 3$  est strictement négatif (il vaut  $-143$ ) et le coefficient de  $c_n^2$  est strictement positif. On en déduit que  $36c_n^2 - 17c_n + 3$  est strictement positif et, finalement que  $h'(c_n)$  est strictement négatif : la fonction  $h$  est donc strictement décroissante sur  $]\frac{1}{3}; 1[$ . En tenant compte de la limite obtenue précédemment, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, h(c_n) > 0$ , c'est-à-dire :  $\forall n \in \mathbb{N}, f(c_n) > g(c_n)$ .

Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, g(c_n) > 0$ , il vient finalement :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{f(c_n)}{g(c_n)} > 1$ .

On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{c_{n+1}}{c_n} > 1$ . La suite  $(c_n)$  est donc strictement croissante.

La suite  $(c_n)$  est strictement croissante et majorée (par  $\frac{1}{3}$ ). On en déduit qu'elle converge. En notant  $c$  sa limite, on peut même préciser :  $0 < c \leq \frac{1}{3}$ .

La relation :  $a_n + b_n = 1 - c_n$  et la convergence de la suite  $(c_n)$  nous permettent de conclure que la suite  $(a_n + b_n)$  converge.

Par ailleurs, la relation  $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{3 - 6c_n + 4c_n^2 - 6a_n b_n}{1 - 6a_n b_n c_n}$  nous donne :

$$6(1 - c_{n+1})a_n b_n c_n = (3 - 6c_n + 4c_n^2)c_n - c_{n+1}$$

Comme  $0 < c_n < 1$  et  $0 < c_{n+1} < 1$ , on a :  $(1 - c_{n+1})c_n \neq 0$  et on en déduit :

$$a_n b_n = \frac{(3 - 6c_n + 4c_n^2)c_n - c_{n+1}}{6(1 - c_{n+1})c_n}$$

La convergence des suites  $(c_n)$  et  $(c_{n+1})$  vers  $c$ , différent de 0 et 1 (voir ci-dessus), nous permet alors de conclure que la suite  $(a_n b_n)$  converge.

La relation :  $a_n b_n = \frac{1}{4}[(a_n + b_n)^2 - (a_n - b_n)^2]$  nous donne :  $(a_n - b_n)^2 = (a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n$ .

Comme la suite  $(a_n + b_n)$  converge, il en va de même de la suite  $((a_n + b_n)^2)$  (composée de la suite  $(a_n + b_n)$  et de la fonction carrée) et, d'après l'égalité ci-dessus, de la suite  $((a_n - b_n)^2)$ .

Comme  $a_n > b_n$ , on a :  $\sqrt{(a_n - b_n)^2} = a_n - b_n$ . Comme la suite  $((a_n - b_n)^2)$  converge, il en va alors de même de la suite  $(a_n - b_n)$  (composée de la suite  $((a_n - b_n)^2)$  et de la fonction racine carrée).

Nous savons donc maintenant que les suites  $(a_n + b_n)$  et  $(a_n - b_n)$  sont convergentes.

Comme :  $a_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) + (a_n - b_n)]$  et  $b_n = \frac{1}{2}[(a_n + b_n) - (a_n - b_n)]$ , on en déduit alors immédiatement que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent.

Les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  convergent.

Nous notons  $a$ ,  $b$  et  $c$  leurs limites respectives.

Comme :  $1 > a_n > b_n > c_n > 0$  et en tenant compte du fait que la suite  $(c_n)$  est strictement croissante, on a :

$$1 \geq a \geq b \geq c > 0$$

Par ailleurs, en passant aux limites dans les trois égalités :

$$a_{n+1} = \frac{a_n(a_n^2 + 3b_n^2 + 3c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n} \quad b_{n+1} = \frac{b_n(3a_n^2 + b_n^2 + 3c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n} \quad c_{n+1} = \frac{c_n(3a_n^2 + 3b_n^2 + c_n^2)}{1 - 6a_nb_nc_n}$$

on obtient :

$$a = \frac{a(a^2 + 3b^2 + 3c^2)}{1 - 6abc} \quad b = \frac{b(3a^2 + b^2 + 3c^2)}{1 - 6abc} \quad c = \frac{c(3a^2 + 3b^2 + c^2)}{1 - 6abc}$$

Les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  étant non nuls, il vient :

$$1 = \frac{a^2 + 3b^2 + 3c^2}{1 - 6abc} \quad 1 = \frac{3a^2 + b^2 + 3c^2}{1 - 6abc} \quad 1 = \frac{3a^2 + 3b^2 + c^2}{1 - 6abc}$$

soit :

$$1 - 6abc = a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3a^2 + b^2 + 3c^2 = 3a^2 + 3b^2 + c^2$$

L'égalité :  $a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3a^2 + b^2 + 3c^2$  donne immédiatement :  $2(a^2 - b^2) = 0$ , soit :

$(a - b)(a + b) = 0$ . Les limites étant strictement positives, cette égalité entraîne :  $a = b$ .

De façon similaire ; l'égalité :  $3a^2 + b^2 + 3c^2 = 3a^2 + 3b^2 + c^2$  entraîne  $b = c$ .

On a donc :  $a = b = c$ .

Mais par ailleurs, on a  $a + b + c = 1$ . D'où :  $3a = 1$  et :  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

On vérifie alors que l'on a bien :

$$a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3a^2 + b^2 + 3c^2 = 3a^2 + 3b^2 + c^2 = 7a^2 = \frac{7}{9} = 1 - 6abc = 1 - 6a^2$$

Les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  convergent vers  $\frac{1}{3}$ .

(e) Le premier scénario conduit à une disparition des cellules des types B et C tandis que le second scénario conduit à un équilibre des différentes espèces qui se trouvent, à terme, identiquement représentées (égalité des proportions).

Les mécanismes génétiques conduisent classiquement à un maintien de la diversité et ce sont les contraintes extérieures qui peuvent conduire à des extinctions d'espèces. Ainsi, on préférera ici le second scénario.

Pour autant, l'équilibre finalement obtenu dans le cadre du second scénario semble un peu trop simple en ce sens que les mécanismes génétiques de reproduction (hors mutations) tendent à maintenir les hiérarchies des proportions et ne vont pas dans le sens de l'homogénéisation.

Le second scénario, quoiqu'imparfait, apparaît comme étant le plus pertinent.
---