Concours général de mathématiques

2010

Exercice 3 (Problème) – Sujet

De la vie sur Mars !

La dernière sonde, envoyée sur Mars par l'Union Européenne, a enfin réussi à observer ce que l'on attendait depuis longtemps : des traces de vie sur la Planète Rouge ! Il s'agit évidemment d'une forme primitive de vie et les êtres observés ne mesurent pas plus d'un millième de millimètre, ce qui explique la difficulté que la sonde a eue à remarquer ce que nous appellerons des *cellules*.

Avec des informations aussi partielles, les scientifiques ont toutefois pu observer les faits suivants :

- Il y a trois espèces de cellules, que l'on désignera par A, B et C.
- La reproduction des cellules implique la participation de trois cellules « parents ».
- Il ne peut y avoir de reproduction que lorsque les trois parents sont « compatibles », c'est-à-dire que au moins deux sont de la même espèce.

1. On a observé des proportions respectives a, b et c de cellules de différentes espèces, avec $a+b+c=1$.

   (a) Quelle est la probabilité p que trois cellules prises au hasard soient compatibles ?

   (b) Montrer que $p \geq \dfrac{7}{9}$. On pourra d'abord établir une inégalité à c fixé.

   Les scientifiques ont établi que lorsque les trois espèces de parents sont les mêmes, la descendance est de la même espèce que ses parents. En revanche, lorsque deux parents sont d'une espèce α et que le troisième est d'une espèce β, les scientifiques hésitent entre deux modèles :

   - Modèle 1 : le descendant est du type de l'espèce majoritaire α.
   - Modèle 2 : le descendant est du type de l'espèce majoritaire β.

   Pour comparer ces modèles, on va estimer l'évolution des proportions de cellules des différentes espèces au cours du temps. On note $a_0 > b_0 > c_0$ les proportions des différentes espèces à la génération 0, et $a_n,\ b_n,\ c_n$ les proportions des différentes espèces à la génération $n \in \mathbb{N}$. Pour déterminer $a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1}$, on prend trois cellules au hasard suivant les proportions $a_n,\ b_n,\ c_n$, et a_{n+1} sera la probabilité que la descendance soit de type A, sachant que les trois parents sont compatibles. Il en est de même pour b_{n+1} et b_{n+1}.

2. **Etude du premier scénario.** On suppose dans cette question que la génétique des cellules martiennes suit le premier scénario.

   (a) Vérifier que

   $$a_{n+1}=\frac{a_n^2\left(3-2a_n\right)}{1-6a_nb_nc_n},\qquad b_{n+1}=\frac{b_n^2\left(3-2b_n\right)}{1-6a_nb_nc_n},\qquad c_{n+1}=\frac{c_n^2\left(3-2c_n\right)}{1-6a_nb_nc_n}$$

   (b) On rappelle dans cette question et les suivantes que $a_0>b_0>c_0$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $a_n>b_n>c_n$. En déduire que $a_n>\frac{1}{3}$, $b_n<\frac{1}{2}$ et $c_n<\frac{1}{3}$.

   (c) Vérifier que les suites $\left(a_n-b_n\right)_{n\geq0}$ et $\left(a_n-c_n\right)_{n\geq0}$ sont croissantes.

   (d) Prouver que $\left(a_n\right)_{n\geq0}$, $\left(b_n\right)_{n\geq0}$ et $\left(c_n\right)_{n\geq0}$ convergent et déterminer leurs limites.

3. **Etude du second scénario.** On suppose maintenant que c'est le deuxième scénario qui est privilégié.

   (a) Déterminer a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

   (b) On suppose à partir de maintenant que $1>a_0>b_0>c_0>0$. Montrer que pour tout n on a $1>a_n>b_n>c_n>0$.

   (c) On pose $f\left(c\right)=\frac{3}{2}-3c+\frac{5}{2}c^2$ et $g\left(c\right)=1-6c^2+12c^3$. Vérifier que $\frac{c_{n+1}}{c_n}\geq\frac{f\left(c_n\right)}{g\left(c_n\right)}$.

   (d) Déterminer les limites de $\left(a_n\right)$, $\left(b_n\right)$ et $\left(c_n\right)$.

   (e) Quel scénario vous semble le plus pertinent ?