Graphes

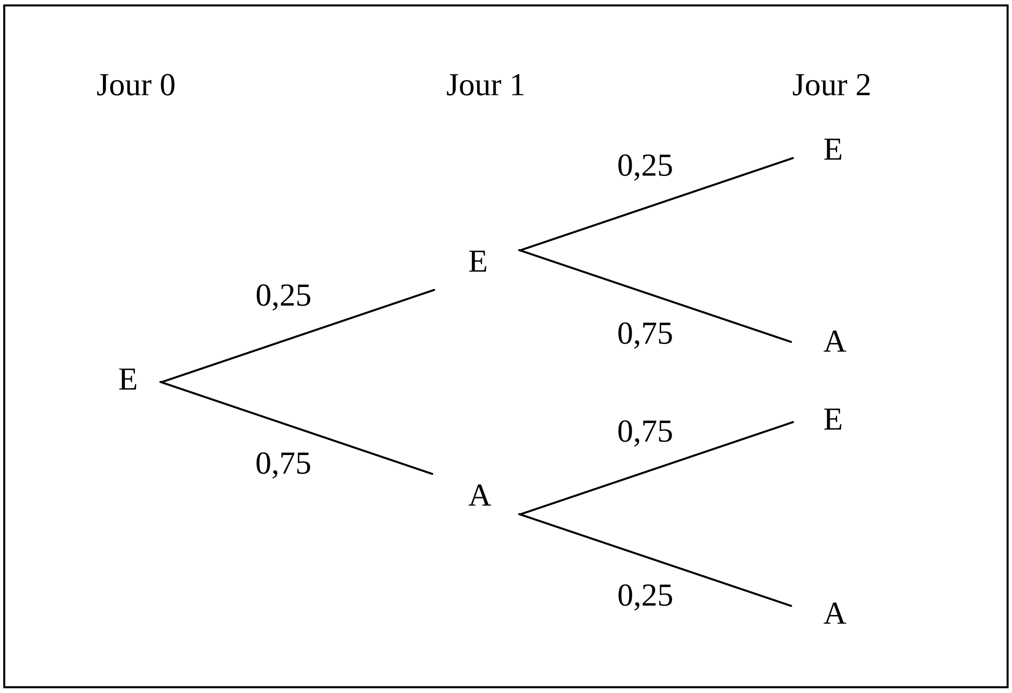
N°22 p282 - Corrigé

Partie A.

1. **a.** Notons A l'état « allumé » du réverbère et E l'état « éteint » (Attention ! Nous ne sommes pas en train de définir des événements probabilistes ici …).

   D'après l'énoncé, la probabilité que le réverbère change d'état est de 0,75. On en déduit que la probabilité que son état soit inchangé est de 0,25.

   Le réverbère étant initialement éteint (c'est à dire dans l'état E), nous pouvons construire l'arbre suivant :



   b. Notons E_n l'événement « le réverbère est éteint le jour *n* » et $p(E_n)$ sa probabilité. On cherche donc, dans cette question, $p(E_2)$.

   Les événements E_1 et $\overline{E_1}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} p(E_2) &= p(E_2 \cap E_1) + p\left(E_2 \cap \overline{E_1}\right) \\ &= p_{E_1}(E_2) \times p(E_1) + p_{\overline{E_1}}(E_2) \times p\left(\overline{E_1}\right) \end{aligned}$$

Comme $p(E_0) = 1$, il vient immédiatement :

$$p(E_1) = 0,25 \text{ et } p\left(\overline{E_1}\right) = 0,75$$

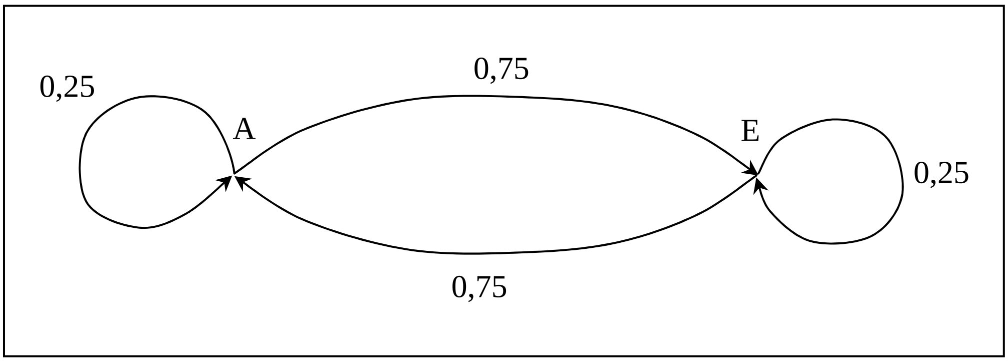
D'où :

$$\begin{aligned} p(E_2) &= p_{E_1}(E_2) \times p(E_1) + p_{\overline{E_1}}(E_2) \times p\left(\overline{E_1}\right) \\ &= 0,25 \times 0,25 + 0,75 \times 0,75 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{9}{16} \\ &= \frac{10}{16} \\ &= \frac{5}{8} \\ &= \boxed{0,625} \end{aligned}$$

La probabilité que le réverbère soit éteint le deuxième jour vaut 0,625.

2. Le réverbère peut être dans deux états (cf. question 1.a.) et on connaît les probabilités de transition d'un état à l'autre.

   Le graphe probabiliste en découle immédiatement :



3. a. Notons les états A et E dans cet ordre (en fait ici pour écrire la matrice de transition, cet ordre est sans importance …). La matrice de transition M s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,75 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b. Avec $N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, on a :

$$N-\frac{1}{2}R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\ -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) & -\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4} & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}=M$$

On a bien :

$$\boxed{\mathbf{N-\frac{1}{2}R=M}}$$

c. $N^2=N\times N=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=N$

$$\boxed{\mathbf{N^2=N}}$$

$$R^2=R\times R=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\\ \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=R$$

$$\boxed{\mathbf{R^2=R}}$$

$$NR=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$$

Où O désigne la matrice nulle (ici d'ordre 2).

$$\boxed{\mathbf{NR = O}}$$

De façon analogue :

$$\mathrm{RN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} & \left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{O}$$

$$\boxed{\mathbf{RN = O}}$$

d. n étant un entier naturel, considérons la proposition P_n « $\mathrm{M}^n = \mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{R}$ ».

Pour $n = 0$, on a d'une part : $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}$ (où désigne ici la matrice unité d'ordre 2) et, d'autre part : $\mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \mathrm{R} = \mathrm{N} + \mathrm{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}$.

On a donc : $\mathrm{M} = \mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 \mathrm{R}$.

La proposition P_n est donc vraie au rang 0.

Supposons maintenant que la proposition soit vraie au rang n.

On suppose donc que l'on a l'égalité : $\mathrm{M}^n = \mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{R}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^{n+1} = \mathrm{M}^n \times \mathrm{M} &= \left(\mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{R}\right) \times \left(\mathrm{N} - \frac{1}{2}\mathrm{R}\right) \\ &= \mathrm{N}\times\mathrm{N} - \frac{1}{2}\mathrm{N}\times\mathrm{R} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{R}\times\mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{R}\times\left(-\frac{1}{2}\mathrm{R}\right) \\ &= \mathrm{N}^2 - \frac{1}{2}\mathrm{NR} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{RN} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \mathrm{R}^2 \\ &= \mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \mathrm{R} \end{aligned}$$

(pour obtenir la dernière ligne, on tient compte des résultats obtenus à la question précédente)

La proposition est ainsi vérifiée au rang $n+1$.

On en déduit finalement que la proposition P_n est vraie pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel *n*.

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{M}^n = \mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{R}}$$

e. Notons $\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} a_n & e_n \end{pmatrix}$ le vecteur ligne donnant l'état probabiliste associé au réverbère le jour *n* : a_n est ainsi la probabilité que le réverbère soit allumé le jour *n* et e_n celle qu'il soit éteint. On a alors : $a_n + e_n = 1$ et $\mathrm{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Dans ces conditions, l'état probabiliste du réverbère le jour *n* est donné par :

$$\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} a_n & e_n \end{pmatrix} = \mathrm{V}_0 \times \mathrm{M}^n$$

Soit :

$$\mathrm{V}_n = \begin{pmatrix} a_n & e_n \end{pmatrix} = \mathrm{V}_0 \times \left(\mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathrm{R} \right)$$

Pour $n = 2$, il vient :

$$\mathrm{V}_2 = \begin{pmatrix} a_2 & e_2 \end{pmatrix} = \mathrm{V}_0 \times \left(\mathrm{N} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{R} \right) = \mathrm{V}_0 \times \left(\mathrm{N} + \frac{1}{4}\mathrm{R} \right)$$

Où e_2 désigne la probabilité que le réverbère soit éteint le deuxième jour.

On a :

$$\mathrm{N} + \frac{1}{4}\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\mathrm{V}_2 = \mathrm{V}_0 \times \left(\mathrm{N} + \frac{1}{4}\mathrm{R} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & e_2 \end{pmatrix}$$

On en déduit immédiatement $e_2 = \frac{5}{8} = 0,625$.
On a ainsi retrouvé le résultat obtenu à la question 1.b.

Partie B.

1. Dans un premier temps, on suppose que le réverbère était éteint au jour 0.
   On a donc : $V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On s'intéresse alors à la probabilité que le réverbère soit éteint au *n*ième jour. On cherche donc e_n.

   D'après la question précédente, on a :

$$V_n = \begin{pmatrix} a_n & e_n \end{pmatrix} = V_0 \times \left(N + \left(-\frac{1}{2}\right)^n R \right)$$

   Or :

$$\begin{aligned}
N + \left(-\frac{1}{2}\right)^n R &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Il vient alors :

$$\begin{aligned}
V_n &= V_0 \times \left(N + \left(-\frac{1}{2}\right)^n R \right) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_n & e_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   D'où, finalement : $\boxed{e_n = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$

Si on se place dans une situation où le réverbère est initialement allumé, on procède de façon analogue mais avec un vecteur d'état probabiliste initial égal à : $V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Par ailleurs, on cherche ici la probabilité que le réverbère soit allumé au *n*ième jour, c'est à dire a_n.

D'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
V_n &= V_0 \times \left(N + \left(-\frac{1}{2}\right)^n R \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \\ \frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) & \frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_n & e_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où, finalement : $\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}$

2. On doit étudier : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \right)$.

La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

Or $-\frac{1}{2}$ appartient à l'intervalle $]-1;1[$. La suite (u_n) est donc convergente de limite nulle : $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Il vient alors : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) \right) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$.

Si le réverbère est initialement éteint (respectivement allumé), la probabilité qu'il soit éteint (respectivement allumé) au bout d'un temps infiniment long est de $\frac{1}{2}$. Celle qu'il soit allumé (respectivement éteint) vaut également $\frac{1}{2}$.
Quelle que soit la situation initiale, l'état stable est représenté parle vecteur ligne $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$: il y a autant de chances que le réverbère soit allumé ou qu'il soit éteint.