Article PanaMaths

→ Exprimer les variations

Introduction

On est classiquement et fréquemment confronté à des variations de grandeurs données. Ce constat est valable quel que soit le domaine d'étude considéré : physique, chimique, biologique, social, économique, financier, etc. On peut se poser de nombreux problèmes quant à ces variations : en comprendre les mécanismes, modéliser le(s) phénomène(s) sous-jacent(s), … Mais auparavant, il peut déjà être question de les exprimer !

Ce court document vise à présenter quelques-uns des outils classiques utilisés dans le secondaire, le supérieur (et, pour certains, … la vie courante !) pour exprimer l'idée de variation. Bien qu'une grandeur dépende souvent de plusieurs autres grandeurs, nous nous limiterons ici au seul cas où la grandeur nous intéressant dépend d'une seule autre grandeur. Dans ce cas, nous faisons l'hypothèse :

- ✓ Que les deux grandeurs varient continûment ;
- ✓ Qu'il existe une éventuelle relation fonctionnelle entre elles qui prend la forme classique : $y = f(x)$.

La variation en valeur et les paramètres associés

La variation en valeur ou variation absolue

Il s'agit de la plus simple d'entre toutes ! Pour une grandeur évoluant entre la valeur initiale y_i et la valeur finale y_f, la variation en valeur s'écrit simplement :

$$\boxed{y_f - y_i}$$

Si la grandeur *y* dépend fonctionnellement de la grandeur *x*, nous pouvons écrire $y_i = f(x_i)$ et $y_f = f(x_f)$. Dans ces conditions, la variation en valeur s'écrit :

$$\boxed{y_f - y_i = f(x_f) - f(x_i)}$$

Le taux de variation ou taux d'accroissement

Dire qu'un chiffre d'affaires a augmenté de 10 millions d'euros n'a que peu de sens si l'on ne précise pas sur quelle durée cette variation a eu lieu ; de même, dire que l'on a parcouru 300 kilomètres est une information en soi mais l'avoir fait en 4 heures ou en 3 jours ne permet pas d'imaginer le même type de voyage … En ramenant une variation en valeur à la variation (elle-même en valeur) d'une autre grandeur, on introduit naturellement la notion de « taux de variation » (ou « taux d'accroissement ») :

$$\boxed{\frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}}$$

S'il existe une dépendance fonctionnelle, on aura :

$$\boxed{\frac{y_f - y_i}{x_f - x_i} = \frac{f\left(x_f\right) - f\left(x_i\right)}{x_f - x_i}}$$

En physique, par exemple, ce rapport est classiquement appelé « vitesse moyenne » (ou, lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre « vitesse ») lorsque la grandeur de référence (celle du dénominateur) est le temps. En général, le terme « vitesse » sous-entend que la grandeur principale (celle du numérateur) est une longueur. Pour d'autres types de grandeur, on pourra rencontrer des termes spécifiques (« débit » lorsque l'on parle d'un volume de fluide écoulé, « intensité électrique » lorsque l'on parle d'une charge électrique,…).

On doit absolument garder présent à l'esprit le fait que ce paramètre donne un chiffre « moyen » : il peut être intéressant de savoir que les précipitations annuelles moyennes sur une ville donnée sont de 450 millimètres et que cette valeur résulte d'observations menées sur les 50 dernières années. Pour autant, il est encore plus intéressant de savoir que pendant ces 50 ans, dans plus de 90% des cas, 400 millimètres sur les 450 ont été reçus par la ville pendant les seuls mois d'avril et mai… Par ailleurs, ces précipitations ont-elles tendance à augmenter ? Diminuer ? Toutes questions qui requièrent des analyses plus fines.

Le taux de variation instantané ou taux d'accroissement instantané

L'approche précédente ne présuppose aucune hypothèse particulière sur les variations de la grandeur *x*. Si la différence $x_f - x_i$ est « petite » on écrira : $x_f = x_i + \Delta x$ (avec Δx petit). Si la fonction *f* est, de plus, supposée dérivable en x_i alors on aura :

$$\frac{f\left(x_f\right) - f\left(x_i\right)}{x_f - x_i} = \frac{f\left(x_i + \Delta x\right) - f\left(x_i\right)}{\left(x_i + \Delta x\right) - x_i} = \frac{f\left(x_i + \Delta x\right) - f\left(x_i\right)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} f'\left(x_i\right)$$

Le taux de variation instantané (ou taux d'accroissement instantané) est obtenu en faisant tendre Δx vers 0. On constate qu'il s'agit « simplement » de la dérivée de la fonction *f* en x_i.

On retrouve la notion classique de « vitesse instantanée ».

Par ailleurs, l'approximation $\dfrac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x} \simeq f'(x_i)$ conduit à l'approximation classique, dite « approximation affine » :

$$\boxed{f(x_i+\Delta x) \simeq f(x_i) + f'(x_i) \times \Delta x}$$

La variation relative et paramètres associés

La variation relative

L'augmentation d'une population de 10 000 individus sur une période donnée s'interprète différemment suivant que la population initiale s'élevait à 1 million d'individus ou à 100 000 … L'idée fondamentale de la variation relative consiste donc à ramener la variation absolue à la valeur initiale de la grandeur considérée :

$$\boxed{\frac{y_f - y_i}{y_i} = \frac{y_f}{y_i} - 1}$$

Remarque : on a classiquement (mais ce n'est en rien une obligation) l'habitude d'exprimer cette variation en pourcentage.

Le taux de croissance

Admettons qu'un chiffre d'affaires nous intéressant ait crû de 7,5%. Sans préciser sur quelle période cette augmentation a pu être constatée, l'information reste incomplète. Ramener une variation relative à la variation en valeur d'une autre grandeur (le temps dans notre exemple) consiste à définir « le taux de croissance » de la grandeur initiale (on pourra ainsi préciser, par exemple, qu'un « prix a crû au rythme de 7,5% par an ») :

$$\boxed{\frac{\dfrac{y_f - y_i}{y_i}}{x_f - x_i} = \frac{\dfrac{y_f}{y_i} - 1}{x_f - x_i}}$$

Le taux de croissance instantané

Comme précédemment, on suppose maintenant que la différence $x_f - x_i$ est « petite » et on écrit $x_f = x_i + \Delta x$ (avec Δx petit). En supposant, de plus, que la fonction *f* est dérivable en x_i, on aura alors :

$$\frac{\dfrac{f\left(x_f\right)-f\left(x_i\right)}{f\left(x_i\right)}}{x_f - x_i} = \frac{1}{f\left(x_i\right)}\frac{f\left(x_i+\Delta x\right)-f\left(x_i\right)}{\left(x_i+\Delta x\right)-x_i} = \frac{1}{f\left(x_i\right)}\frac{f\left(x_i+\Delta x\right)-f\left(x_i\right)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \frac{f'\left(x_i\right)}{f\left(x_i\right)}$$

Le « taux de croissance instantané » est ainsi obtenu en faisant tendre Δx vers 0. Dans le cas (ce qui est classique en économie) où la fonction *f* prend des valeurs strictement positives, on constate qu'on obtient finalement la dérivée logarithmique de la fonction *f* en x_i :

$$\boxed{\frac{f'\left(x_i\right)}{f\left(x_i\right)} = \left(\ln f\right)'\left(x_i\right)}$$

L'élasticité

Indépendamment de la grandeur « temps », on peut préférer souvent, en économie, raisonner sur des variations relatives (généralement exprimées en pourcentages) en se posant, par exemple, des questions du type « Si le prix d'un bien augmente de *x*%, de quel pourcentage variera la demande pour ce bien ? », … Rappelons que l'élasticité est une fonction de la variable de référence. Ainsi, on sait qu'à l'heure actuelle, l'élasticité du prix du gazole à la pompe est faible (un faible pourcentage d'augmentation du prix au litre conduit à un faible pourcentage de baisse de la demande). Mais si ce prix était prochainement de 5€ le litre, l'élasticité prendrait alors (en valeur absolue) une valeur beaucoup plus élevée.

On peut être ainsi amené à mettre en correspondance deux variations relatives.

A partir des grandeurs *x* et *y*, on considèrera le rapport :

$$\frac{\dfrac{y_f - y_i}{y_i}}{\dfrac{x_f - x_i}{x_i}} = \frac{\dfrac{y_f}{y_i} - 1}{\dfrac{x_f}{x_i} - 1}$$

S'il existe une relation fonctionnelle entre les grandeurs *x* et *y*, le rapport se récrit :

$$\frac{\frac{y_f - y_i}{y_i}}{\frac{x_f - x_i}{x_i}} = \frac{\frac{y_f}{y_i} - 1}{\frac{x_f}{x_i} - 1} = \frac{\frac{f(x_f)}{f(x_i)} - 1}{\frac{x_f}{x_i} - 1}$$

Soit, en posant $x_f = x_i + \Delta x$ et $y_f = y_i + \Delta y$:

$$\frac{\frac{y_f - y_i}{y_i}}{\frac{x_f - x_i}{x_i}} = \frac{\frac{\Delta y}{y_i}}{\frac{\Delta x}{x_i}} = \frac{x_i}{y_i}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

En faisant tendre les différences vers 0, on obtient finalement :

$$\frac{\frac{y_f - y_i}{y_i}}{\frac{x_f - x_i}{x_i}} = \frac{x_i}{y_i}\frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq x_i \frac{f'(x_i)}{f(x_i)}.$$

En raisonnant avec la grandeur *x* comme grandeur de référence, on définit ainsi l'élasticité $\mathscr{E}(y/x)$ de la grandeur *y* par rapport à la grandeur *x* par :

$$\boxed{\mathscr{E}(y/x) = x\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

On note qu'il s'agit d'une fonction de la variable *x*.

Dans la pratique, on utilisera souvent l'approximation suivante :

$$\boxed{\frac{\Delta y}{y_i} \simeq \mathscr{E}(y/x) \times \frac{\Delta x}{x_i}}$$

Considérons l'exemple très simple suivant : un bien est proposé au prix de *p*€. La demande *D* s'écrit, en fonction de *p* : $D(p) = \frac{8}{p+1}$ (l'unité avec laquelle s'exprime cette demande n'importe pas ici). On suppose que le prix est fixé à 4 euros et qu'il augmente de 10cts. On demande alors le pourcentage d'évolution de la demande (valeur approchée et valeur exacte).

Commençons par donner une valeur approchée en utilisant l'élasticité de la demande par rapport au prix.

On a : $D'(p)=\dfrac{-8}{(p+1)^2}$.

D'où : $\mathscr{E}(D/p)=p\dfrac{D'(p)}{D(p)}=p\dfrac{\dfrac{-8}{(p+1)^2}}{\dfrac{8}{p+1}}=-p\dfrac{8}{(p+1)^2}\times\dfrac{p+1}{8}=\dfrac{-p}{p+1}$.

Numériquement : $\mathscr{E}(D/p)_{p=4}=\dfrac{-4}{4+1}=\dfrac{-4}{5}=-0,8$.

La variation relative du prix vaut : $\dfrac{4,1-4}{4}=\dfrac{0,1}{4}=0,025=2,5\%$.

Pour obtenir une valeur approchée de la variation relative de la demande, on multiplie ce pourcentage par l'élasticité calculée précédemment : $2,5\times(-0,8)=-2$.

La demande va ainsi diminuer d'environ $\boxed{2\%}$.

Pour donner la valeur exacte, calculons la demande pour un prix de 4,1€ :

$$D(4,1)=\frac{8}{4,1+1}=\frac{8}{5,1}=\frac{80}{51}$$

Par ailleurs, on a : $D(4)=\dfrac{8}{4+1}=\dfrac{8}{5}$.

La valeur exacte de la variation relative de la demande s'écrit donc :

$$\frac{D(4,1)-D(4)}{D(4)}=\frac{\dfrac{80}{51}-\dfrac{8}{5}}{\dfrac{8}{5}}=\frac{\dfrac{80\times5-8\times51}{51\times5}}{\dfrac{8}{5}}=\frac{\dfrac{-8}{51\times5}}{\dfrac{8}{5}}=\frac{-8}{51\times5}\times\frac{5}{8}=\frac{-1}{51}\simeq-0,0196=\boxed{-1,96\%}$$

L'utilisation de l'élasticité nous conduit ainsi à commettre une erreur relative ε qui vaut :

$$\varepsilon=\frac{-2-(-1,96)}{-1,96}=\frac{-0,04}{-1,96}=0,02041=\boxed{2,041\%}$$