Article PanaMaths

→ Le théorème de Céva

Introduction

Le théorème de Céva qu'il publie en 1678, est un beau théorème, très pratique pour établir de nombreux résultat de concours dans le triangle.

Giovanni Céva (Milan 1647 – Mantoue 1734) était un mathématicien et scientifique italien qui s'est principalement intéressé à la géométrie mais qui a également effectué des travaux en hydraulique et dans le domaine des mathématique appliquées à l'économie. Après avoir brièvement enseigné à Pise, il obtient en 1686 un poste de professeur de Mathématiques à l'université de Mantoue où il demeurera jusqu'à sa mort.

Les notions abordées dans ce document sont des notions de géométrie vues dans les classes du secondaire : théorème de Thalès, cercle circonscrit, cercle inscrit et barycentre. Seule la notion de « mesure algébrique » sera peut-être nouvelle pour certains élèves.

Le théorème de Céva

Soit ABC un triangle.
Soit A', B' et C' trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (AC) et (AB) et différents des sommets du triangle.

On a :

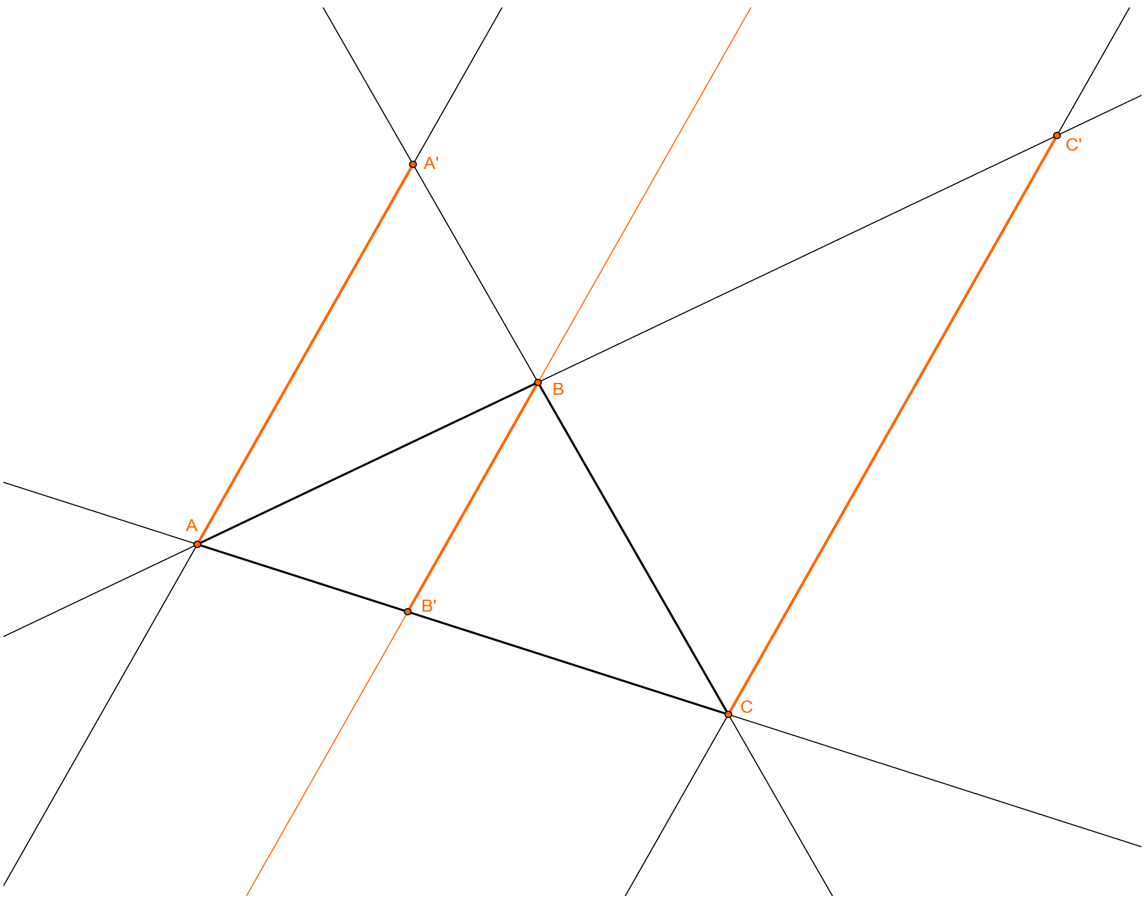
$$(AA'),\ (BB') \text{ et } (CC') \text{ parallèles ou concourantes} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}\times\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}\times\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}=-1$$

Remarque : l'égalité $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}\times\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}\times\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}=-1$ peut également être mémorisée sous la forme équivalente suivante : $\frac{\overline{\boxed{A}C'}}{\overline{C'\boxed{B}}}\times\frac{\overline{\boxed{B}A'}}{\overline{A'\boxed{C}}}\times\frac{\overline{\boxed{C}B'}}{\overline{B'\boxed{A}}}=1$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

Nous commençons par traiter le cas où les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles (voir figure ci-dessous).



Le parallélisme nous permet d'utiliser le théorème de Thalès.

On obtient immédiatement en considérant :

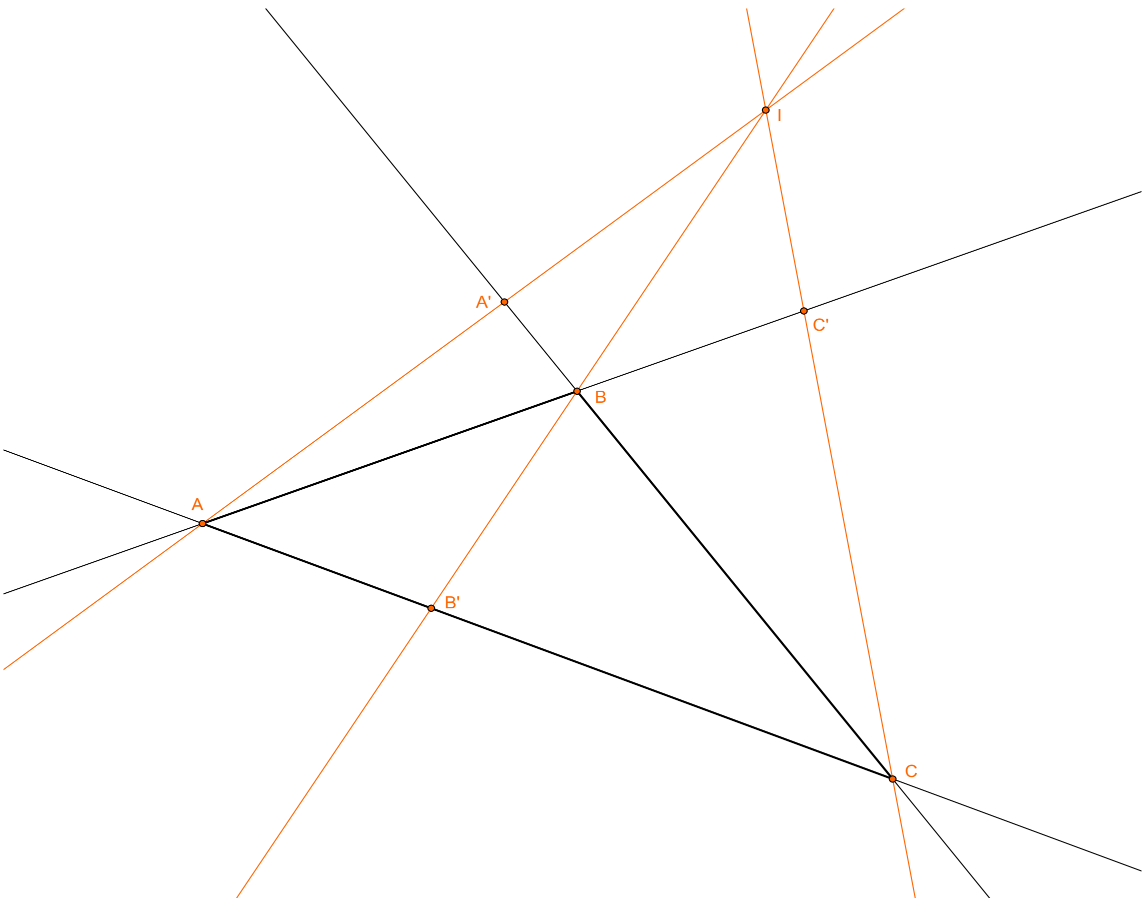
- Le point A et les droites (AB) et (AB') : $\frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}$ soit : $\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}}$.
- Le point C et les droites (CB) et (CB') : $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}}$, soit : $\frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}}$.

En multipliant membre à membre ces deux égalités, il vient :

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} \times \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{CA}} \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AB'}} = -\frac{\overline{CB'}}{\overline{AB'}}$$

On en déduit alors : $\dfrac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} \times \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} \times \dfrac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}} = -1$. On a bien obtenu l'égalité cherchée.

Nous nous intéressons maintenant au cas où les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes et nous notons I leur point d'intersection (voir figure ci-dessous).



Dans un premier temps, établissons que le point I ne peut appartenir à aucune des droites (AB), (BC) et (AC).

Supposons, par exemple, que le point I appartienne à la droite (AB).

Dans ce cas, les droites (AB) et (AA') seraient confondues.

Mais comme le point A' est un point de la droite (BC), on en déduiraient finalement que le point A serait le point d'intersection des droites (AB) et (BC). En d'autres termes, les points A' et B seraient confondus, ce qui, par hypothèse, n'est pas le cas.

Le point I n'appartient donc pas à la droite (AB).

En raisonnant de façon similaire, on établit que le point I n'appartient pas aux droites (BC) et (AC).

Finalement, le point I n'appartient à aucune des droites (AB), (BC) et (AC).

Les points A, B et C n'étant pas alignés, le point I peut être considéré comme barycentre de ces trois points :

$$\mathrm{I} = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

avec : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

On peut être plus précis. Si α était nul, le point I appartiendrait à la droite (BC), ce qui n'est pas le cas. On a donc $\alpha \neq 0$.
De façon similaire, on montre que l'on a : $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$.

On a également $\beta + \gamma \neq 0$.
En effet, supposons que l'on ait $\beta + \gamma = 0$. On aurait alors :

$$\mathrm{I} = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \hline \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \hline \alpha & \beta & -\beta \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{IB}} - \beta\,\overrightarrow{\mathrm{IC}} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \alpha\,\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \beta\,\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \vec{0}$$

Ainsi, les droites (AI) et (BC) seraient parallèles, ce qui est absurde puisqu'elles se coupent en A'. On a donc : $\beta + \gamma \neq 0$.

L'associativité du barycentre nous permet alors de considérer : $\mathrm{A}'' = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \hline \beta & \gamma \end{pmatrix}$. Il vient alors :

$$\mathrm{I} = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A}'' \\ \hline \alpha & \beta + \gamma \end{pmatrix}$$

Le point A'' étant donc un point de la droite (BC).

Ainsi, le point A'' est le point d'intersection de la droite (AI) et de la droite (BC).

Or, ces deux droites se coupent en A'. On en déduit immédiatement que les points A'' et A' sont confondus.
On a donc :

$$\mathrm{A}' = \mathrm{bar}\begin{pmatrix} \mathrm{B} & C \\ \hline \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

D'où : $\beta\overrightarrow{A'B}+\gamma\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$ et enfin, les coefficients étant non nuls : $\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}=-\dfrac{\beta}{\gamma}$.

On démontre de façon similaire à ce qui vient d'être fait que l'on a : $\alpha+\beta\neq 0$ et $\alpha+\gamma\neq 0$.
On considère alors les barycentres $C''=\text{bar}\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ et $B''=\text{bar}\begin{pmatrix} A & C \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}$ et on démontre qu'ils sont respectivement confondus avec les points C' et B'. On a donc :

$$B'=\text{bar}\begin{pmatrix} A & C \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix} \text{ et } C'=\text{bar}\begin{pmatrix} A & B \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

On en tire alors respectivement : $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$ et $\dfrac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}=-\dfrac{\alpha}{\beta}$.
En multipliant enfin membre à membre les trois égalités obtenues, il vient :

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}}\times\frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}}\times\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}=-\frac{\beta}{\gamma}\times\left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right)\times\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)=-1$$

On obtient bien l'égalité cherchée.

On a ainsi établi :

$$(AA'),\ (BB') \text{ et } (CC') \text{ parallèles ou concourantes} \Rightarrow \frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}\times\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}\times\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}=-1$$

Il convient désormais d'établir la réciproque de ce résultat.

$\boxed{\Leftarrow}$

Nous supposons ici que l'on a : $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}\times\dfrac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}\times\dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}=-1$.
Considérons alors les droites (AA') et (BB'). Deux situations sont envisageables : soit ces droites sont parallèles, soit elles sont sécantes. Nous allons envisager ces deux situations successivement.

→ (AA') et (BB') sont parallèles.

On a donc deux droites parallèles, (AA') et (BB'), et deux droites sécantes en C, (AC) et (BC). Le théorème de Thalès nous donne alors : $\dfrac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB'}}$. D'où : $\dfrac{\overline{CA'}\times\overline{AB'}}{\overline{BA'}}=\overline{AC}$.

On a alors :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}\times\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}\times\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}=-1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\overline{CA'}\times\overline{AB'}}{\overline{BA'}}\times\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}\times\overline{CB'}}=-1\\
\Rightarrow\ &\overline{AC}\times\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}\times\overline{CB'}}=-1\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}=\frac{\overline{B'C}}{\overline{AC}}
\end{aligned}
$$

La réciproque du théorème de Thalès nous permet alors d'en déduire que les droites (BB') et (CC') sont parallèles.

En définitive, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

→ (AA') et (BB') sont sécantes.

Nous notons I leur point d'intersection.
Pour se ramener à la situation « favorable » (trois droites sécantes), nous introduisons le point J, intersection des droites (CI) et (AB).

D'après la première implication démontrée, on a : $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AJ}}\times\frac{\overline{BJ}}{\overline{BA'}}\times\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}=-1$.

Mais, par hypothèse, on a aussi : $\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC'}}\times\frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}}\times\frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}=-1$.

Des deux égalités, on tire immédiatement : $\frac{\overline{BJ}}{\overline{AJ}}=\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}}$.

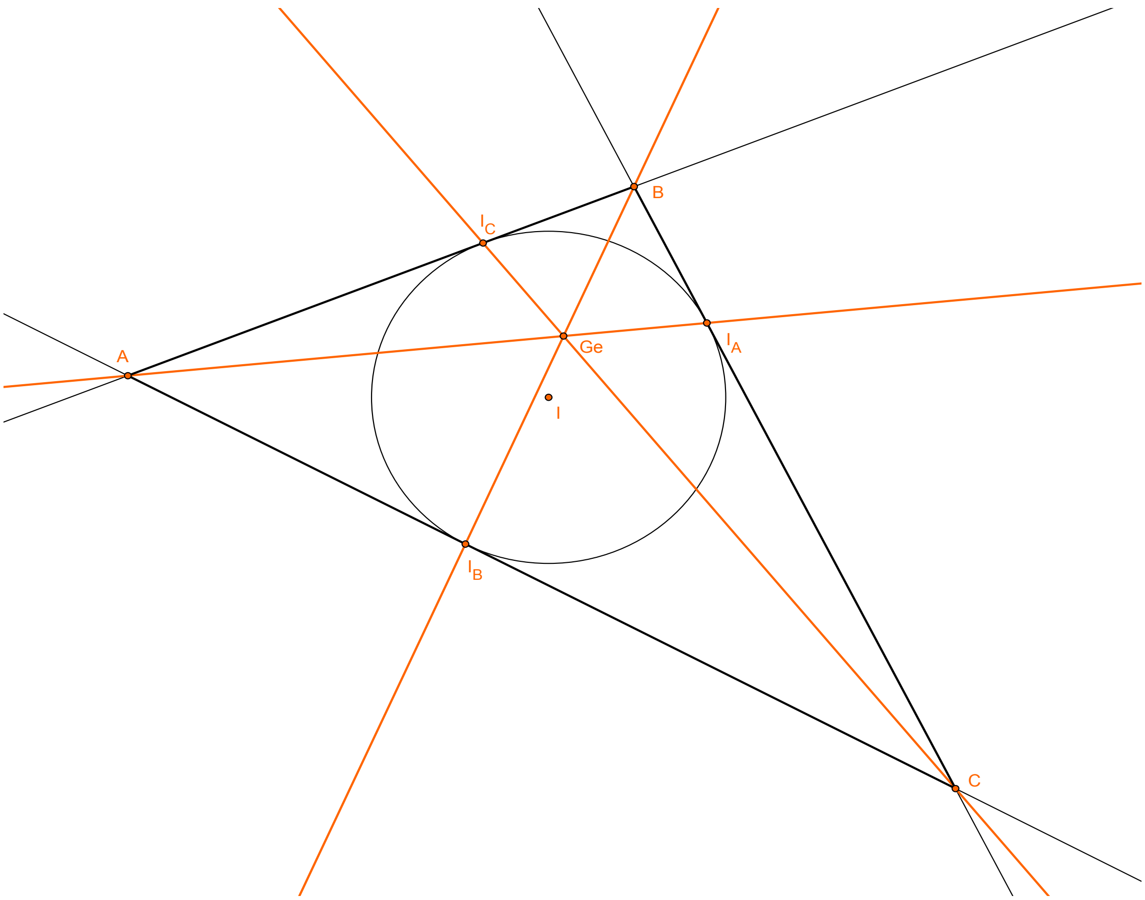
Les points A, B, J et C' étant alignés, l'égalité ci-dessus nous permet de conclure que les points J et C' sont confondus. En d'autres termes, le point C' est le point d'intersection des droites (CI) et (AB). Ainsi, le point I est le point d'intersection des droites (AA'), (BB') et (CC'). Elles sont bien concourantes.

La réciproque est ainsi démontrée.

Autour du théorème de Céva

Un théorème

Soit ABC un triangle et soit I le centre de son cercle inscrit.
On note I_A, I_B et I_C les projetés respectifs du point I sur les droites (BC), (AC) et (AB).
Les droites (AI_A), (BI_B) et (CI_C) sont concourantes en un point (Ge sur la figure ci-dessous) appelé « point de Gergonne » du triangle ABC.



Joseph Gergonne

Joseph Gergonne (Nacy 1771 – Montpellier 1859) est officier d'artillerie (il participa à la bataille de Valmy en 1792) puis professeur de Mathématiques (à partir de 1795) à l'Ecole centrale de Nîmes où il occupa la chaire de géométrie transcendante. A partir de 1816, il occupe la chaire d'astronomie de l'université de Montpellier.

De 1810 à 1832, il fonde, édite et participe à la rédaction des *Annales de Mathématiques pures et appliquées* (ou *Annales de Gergonne*), considérées comme la première revue professionnelles de Mathématiques.

Démonstration

Le point I appartenant à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, on a : $AI_B = AI_C \ (1)$.
De façon similaire, on a : $BI_A = BI_C \ (2)$ et $CI_A = CI_B \ (3)$.

Ici, les points I_A, I_B et I_C jouent les rôles respectifs des points A', B' et C' dans le théorème de Céva.

On a, en tenant compte des égalités (1), (2) et (3) :

$$\left|\frac{\overline{AI_B}}{\overline{AI_C}} \times \frac{\overline{BI_C}}{\overline{BI_A}} \times \frac{\overline{CI_A}}{\overline{CI_B}}\right| = \frac{AI_B}{AI_C} \times \frac{BI_C}{BI_A} \times \frac{CI_A}{CI_B} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

Par ailleurs, les points I_A, I_B et I_C appartiennent respectivement aux segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On a donc : $\frac{\overline{CI_A}}{\overline{BI_A}} < 0$, $\frac{\overline{AI_B}}{\overline{CI_B}} < 0$ et $\frac{\overline{AI_C}}{\overline{BI_C}} < 0$.

On en déduit : $\frac{\overline{AI_B}}{\overline{AI_C}} \times \frac{\overline{BI_C}}{\overline{BI_A}} \times \frac{\overline{CI_A}}{\overline{CI_B}} = \frac{\overline{CI_A}}{\overline{BI_A}} \times \frac{\overline{AI_B}}{\overline{CI_B}} \times \frac{\overline{AI_C}}{\overline{BI_C}} < 0$.

Finalement, le produit $\frac{\overline{AI_B}}{\overline{AI_C}} \times \frac{\overline{BI_C}}{\overline{BI_A}} \times \frac{\overline{CI_A}}{\overline{CI_B}}$ est strictement négatif de valeur absolue égale à 1. Il est donc égal à -1.

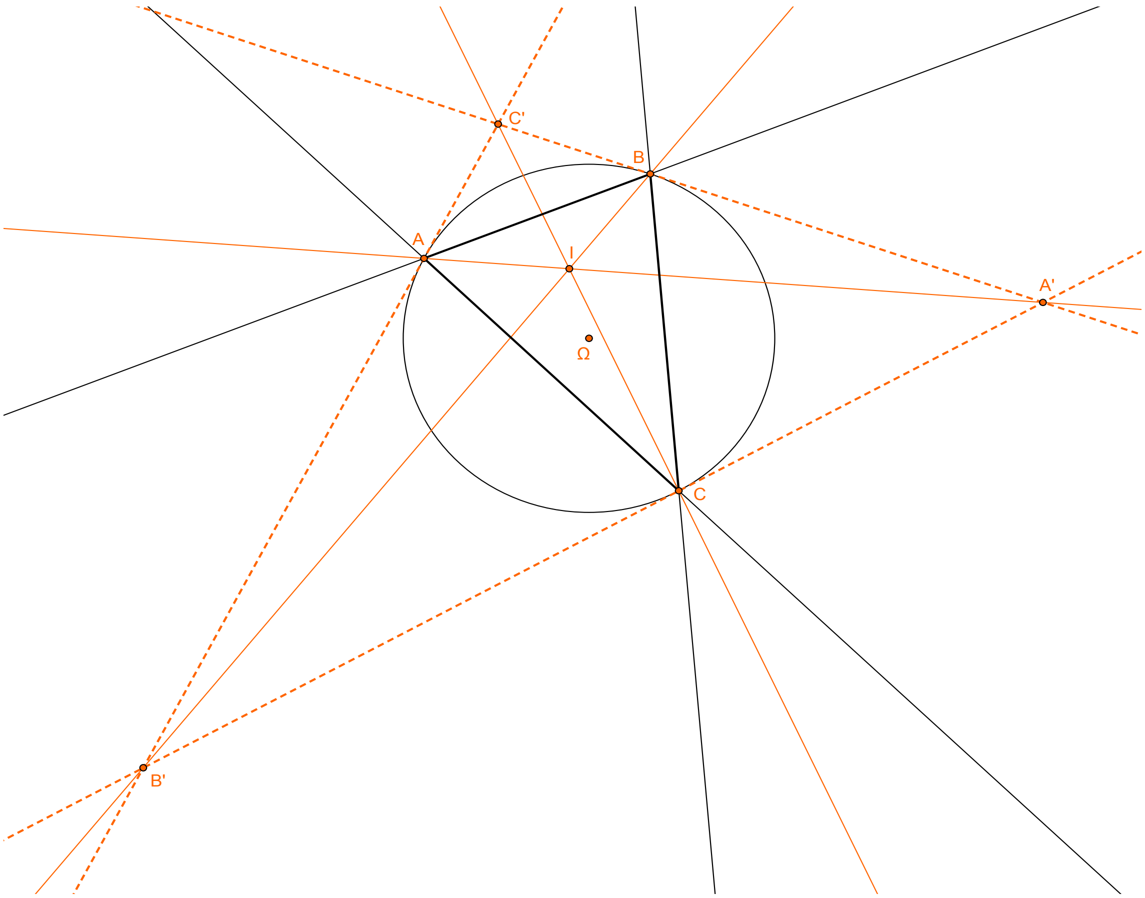
D'après le théorème de Céva, on peut donc affirmer que les droites (AI_A), (BI_B) et (CI_C) sont concourantes ou parallèles. Or, ces droites ne sont pas parallèles (démonstration classique par l'absurde), elles sont donc concourantes.

Le résultat est ainsi établi.

On peut donner une autre situation qui se ramène à celle que nous venons de traiter.

Soit ABC un triangle non rectangle et soit Ω le centre de son cercle circonscrit $\mathscr{C}$.
On note A' le point d'intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ en B et en C.
On note B' le point d'intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ en A et en C.
On note C' le point d'intersection des tangentes à $\mathscr{C}$ en A et en B.
Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Les droites $(A'B')$, $(B'C')$ et $(C'A')$ étant tangentes à $\mathscr{C}$ (en C, A et B respectivement), on en déduit que le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle inscrit dans le triangle $A'B'C'$. On en est ainsi ramené à la situation précédente et on peut conclure.



Le théorème de Gergonne

Joseph Gergonne est également connu pour le théorème suivant qui vient compléter le résultat relatif au point de Gergonne :

Soit ABC un triangle.
Soit A', B' et C' trois points appartenant respectivement aux droites (BC), (AC) et (AB).

Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en I alors on a :

$$\frac{\overline{A'I}}{\overline{A'A}}+\frac{\overline{B'I}}{\overline{B'B}}+\frac{\overline{C'I}}{\overline{C'C}}=1$$

Dans la démonstration ci-dessous, nous supposons que les points A', B' et C' sont différents des points A, B et C (pour traiter ce cas particulier, on pourra, par exemple, supposer que les points B et A' sont confondus).

Comme nous supposons que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, nous pouvons utiliser le résultat suivant obtenu dans la première partie de la démonstration du théorème de Céva : $I = \text{bar}\left(\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline \alpha & \beta+\gamma \end{array}\right)$.

On a donc : $\alpha\overrightarrow{IA} + (\beta+\gamma)\overrightarrow{IA'} = \vec{0}$, d'où : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{A'I} = \alpha\overrightarrow{A'A}$.

Enfin : $\dfrac{\overline{A'I}}{\overline{A'A}} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$.

De façon similaire, on établit : $\dfrac{\overline{B'I}}{\overline{B'B}} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $\dfrac{\overline{C'I}}{\overline{C'C}} = \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$.

On en déduit immédiatement le résultat cherché.