Article PanaMaths

→ La formule de Viète

$$\pi = 2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\times\ldots$$

Introduction

Dans cet article, nous nous proposons d'établir la jolie formule ci-dessus due au mathématicien français François VIETE (1540-1603).

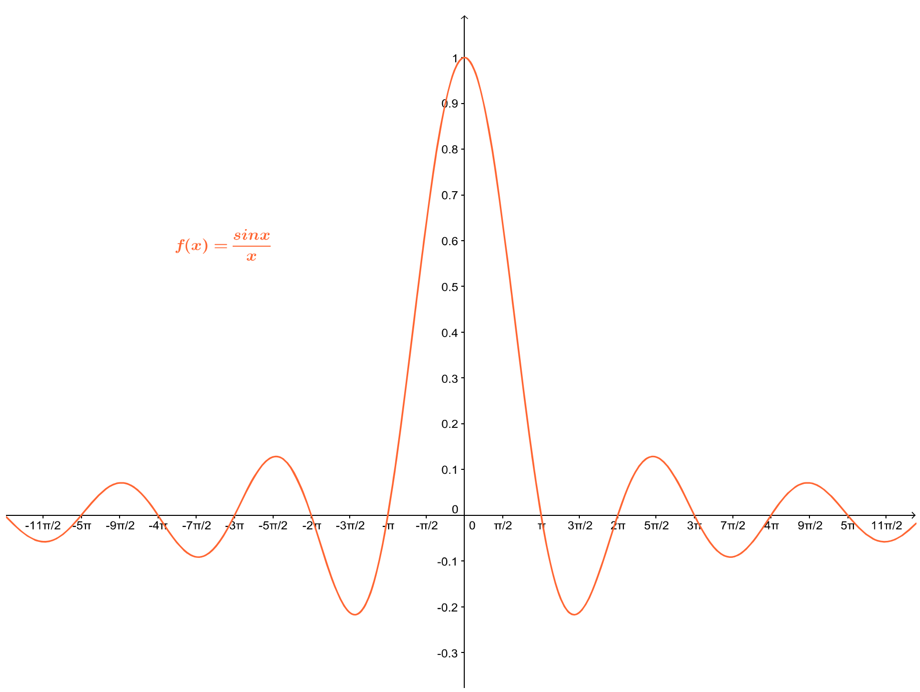
La démonstration exposée ci-après fait appel à la fonction « sinus cardinal » qui joue un rôle important dans le domaine du traitement du signal et que les élèves des classes de terminale S, en particulier, entrevoient à travers la célèbre limite : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

La fonction sinus cardinal, notée « sinc » est définie comme suit :

$$\operatorname{sinc}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Sans nous attarder plus longuement sur elle, on notera cependant qu'elle est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}$ (on se concentrera sur la dérivabilité en 0).

Nous en fournissons ci-dessous une représentation graphique :



Le sinus cardinal comme un produit infini

Nous allons montrer par récurrence que pour tout x réel et tout entier naturel n non nul, on a :

$$\operatorname{sinc}(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{4}\right)\times\cos\left(\frac{x}{8}\right)\times\ldots\times\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\times\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Pour $x=0$, on a immédiatement $\forall n\in\mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)=\cos 0=1$ et $\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^n}\right)=\operatorname{sinc}(0)=1$.

Comme $\operatorname{sinc}(0)=1$, l'égalité est bien vérifiée.

Nous supposons maintenant que le réel x est différent de 0 et menons un raisonnement par récurrence.

Pour $n=1$ (initialisation), on a :

$$\operatorname{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin\left(2\times\frac{x}{2}\right)}{x}=\frac{\cancel{2}\times\sin\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cancel{2}\times\frac{x}{2}}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2}\right)$$

L'égalité est ainsi vérifiée au rang 1.

Soit maintenant n un entier naturel non nul quelconque fixé (hérédité).

On suppose l'égalité $\operatorname{sinc}(x)=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{4}\right)\times\cos\left(\frac{x}{8}\right)\times\ldots\times\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\times\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^n}\right)$ vraie (hypothèse de récurrence).

Qu'en est-il au rang $n+1$?

On adopte la même démarche que pour le cas $n=1$ en faisant intervenir l'angle moitié :

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^n}\right)&=\frac{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin\left(2\times\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^n}}\\&=\frac{\cancel{2}\times\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\cancel{2}\times\frac{x}{2^{n+1}}}\\&=\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{\frac{x}{2^{n+1}}}\\&=\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\times\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{sinc}(x) &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{4}\right)\times\cos\left(\frac{x}{8}\right)\times\ldots\times\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\times\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^n}\right)\\ &= \cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{4}\right)\times\cos\left(\frac{x}{8}\right)\times\ldots\times\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\times\cos\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\times\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

L'égalité est ainsi valable au rang $n+1$.

On en déduit finalement que l'égalité est vraie à n'importe quel rang *n* non nul.

Pour *x* réel fixé, introduisons alors les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel *n* non nul, par :

$$u_n = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{4}\right)\times\cos\left(\frac{x}{8}\right)\times\ldots\times\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$v_n = \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Dans ces conditions, l'égalité obtenue précédemment se récrit : $\operatorname{sinc}(x) = u_n \times v_n$.

On a immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$.

Or, la fonction sinc est continue en 0. On en déduit donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \operatorname{sinc}(0) = 1$.

Ainsi, la suite (v_n) converge et admet pour limite 1. Du fait de l'égalité $\operatorname{sinc}(x) = u_n \times v_n$, on en déduit alors que la suite (u_n) converge également et on a :

$$\operatorname{sinc}(x) = \lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n$$

On note : $\cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{4}\right)\times\cos\left(\frac{x}{8}\right)\times\ldots\times\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\times\ldots = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ la limite de la suite (u_n) et on a donc :

$$\boxed{\operatorname{sinc}(x) = \prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\times\cos\left(\frac{x}{4}\right)\times\cos\left(\frac{x}{8}\right)\times\ldots\times\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\times\ldots}$$

On a ainsi obtenu une expression de $\operatorname{sinc}(x)$ sous la forme d'un produit infini.

La formule de Viète

Pour obtenir la formule de Viète, nous choisissons $x=\frac{\pi}{2}$ et utilisons l'égalité obtenue ci-dessus.

On a d'abord : $\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$.

Par ailleurs : $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2^n}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\times\ldots$

A partir de la formule $\cos\alpha=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1$, on a : $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos\alpha}{2}$.

Comme nous nous intéressons à des angles appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et donc de cosinus positifs, on va pouvoir utiliser : $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

Ainsi, avec $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Puis :

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

Il semblerait ainsi que l'on ait : $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$, la fraction comportant $n-1$ radicaux au numérateur.

Pour l'établir rigoureusement, nous pouvons définir la suite (u_n) par :

$$u_0=\sqrt{2}$$
$$\forall n\in\mathbb{N},\, u_{n+1}=\sqrt{2+u_n}$$

Les premiers termes de cette suite décrivent correctement les numérateurs des premiers cosinus des angles de la forme $\frac{\pi}{2^n}$. Nous allons en fait montrer par récurrence que l'on a, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{u_{n-2}}{2}$$

Pour $n=2$ (initialisation).
On a : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{u_0}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
L'égalité est donc vérifiée pour $n=2$.

Soit maintenant un entier naturel *n* quelconque fixé supérieur ou égal à 2 (hérédité).
On suppose que l'on a (hypothèse de récurrence) : $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{u_{n-2}}{2}$.
Qu'en est-il au rang $n+1$?

Il vient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{u_{n-2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+u_{n-2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+u_{n-2}}}{2}=\frac{u_{n-1}}{2}=\frac{u_{(n+1)-2}}{2}$$

L'égalité est ainsi vérifiée au rang $n+1$.

On en déduit finalement que l'égalité est vraie à n'importe quel rang *n* supérieur ou égal à 2.

Nous avons bien, pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2 :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{u_{n-2}}{2}=\frac{\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}^{\,\cdots}}{2}$$

On a finalement :

$$\frac{2}{\pi}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)\times\ldots=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\times\ldots$$

Soit, en inversant chaque membre de l'égalité :

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\ldots$$

On en tire enfin la formule de Viète :

$$\boxed{\pi=2\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\times\ldots}$$

Pour finir …

On peut se servir de la formule de Viète pour obtenir des valeurs approchées de π.

A l'aide des éléments précédents, on peut définir la suite suivante :

$$p_0 = 2$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{u_n}$$

où (u_n) est la suite utilisée page précédente :

$$u_0 = \sqrt{2}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$$

Dans ces conditions, on a : $\lim_{n \to +\infty} p_n = \pi$.

On obtient (valeurs approchées à 10^{-9}) :

n	p_n
0	2,000 000 000
1	2,828 427 125
2	3,061 467 459
3	3,121 445 152
4	3,136 548 491
5	3,140 331 157
6	3,141 277 251
7	3,141 513 801
8	3,141 572 940
9	3,141 587 725
10	3,141 591 422
11	3,141 592 346
12	3,141 592 577
13	3,141 592 634
14	3,141 592 649
15	3,141 592 652

A comparer à 3,151 492 654. La convergence est rapide mais l'efficacité de l'algorithme est à relativiser du fait de la présence des radicaux ...