Article PanaMaths
→ L'algorithme de Héron d'Alexandrie

Introduction

Héron d'Alexandrie est un géomètre grec mais il ne fut pas que cela …

Ayant vécu au premier siècle de notre ère et, probablement, au début du second (i.e. sous l'empire romain), il s'affirma comme un remarquable inventeur, un ingénieur avant l'heure mettant au point de nombreux appareils de mesure, inventeur de nombreuses machines utilisant l'action mécanique potentielle de la vapeur d'eau, d'une clepsydre, d'un odomètre, etc.

Féru de géométrie et soucieux de ses applications, il étudia également l'optique dans son ouvrage « Catopticra » où, suivant la démarche aristotélicienne, il pose les principes de réflexion de la lumière, celle-ci se déplaçant suivant le chemin le plus court.

La méthode étudiée dans ce document permet d'extraire, via une suite récurrente, la racine carrée d'un nombre positif. Elle ne semble pas être l'invention de Héron lui-même mais aurait été mise au point par le babyloniens. Elle apparaît dans son ouvrage « Geometrica » qui fut découvert tardivement (1896) à Constantinople.

Sources.
1. Wikipédia : article sur Héron d'Alexandrie.
2. « Des mathématiciens de A à Z ». Bertrand HAUCHECORNE, Daniel SURREAU. Editions ELLIPSES

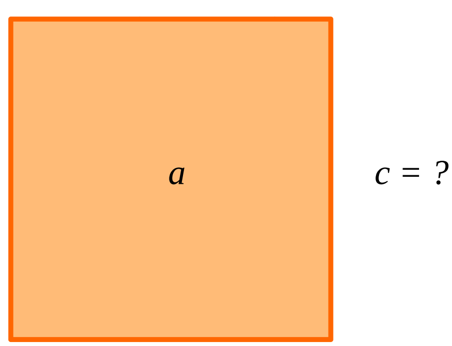
L'algorithme de Héron d'Alexandrie

Le problème

On cherche la racine carrée d'un nombre strictement positif a.

Pour Héron, ce problème se posait sous la forme géométrique suivante :

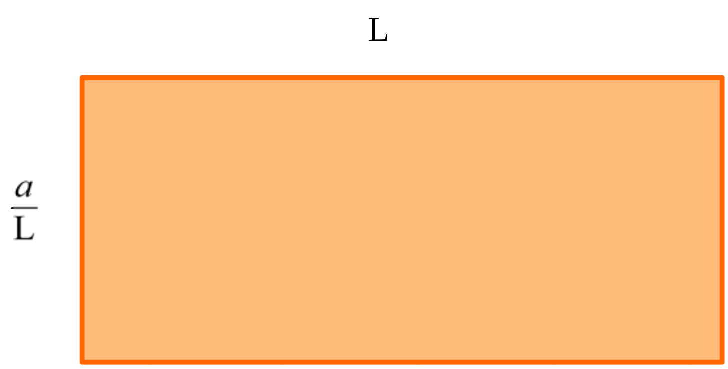
Comment trouver la longueur du côté d'un carré d'aire *a* donnée ?



La méthode de Héron

La méthode de Héron consiste à construire une suite de rectangles dont les longueurs des côtés vont évoluer et se rapprocher de la valeur $\sqrt{a}$.

Il part d’un rectangle dont la longueur de deux côtés opposés est notée L. Afin que l’aire de ce rectangle soit égale à *a*, la longueur des deux autres côtés opposés vaut nécessairement $\frac{a}{\mathrm{L}}$ (voir la figure ci-après).



Supposons par exemple que l’on ait : $\mathrm{L} > \sqrt{a}$ (on raisonnerait de façon tout à fait similaire à partir de l’hypothèse $\mathrm{L} < \sqrt{a}$). Il en découle immédiatement $\frac{1}{\mathrm{L}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ puis $\frac{a}{\mathrm{L}} < \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$.

D’où : $\frac{a}{\mathrm{L}} < \sqrt{a} < \mathrm{L}$.

Puisque le nombre cherché, $\sqrt{a}$, se situe entre L et $\frac{a}{\mathrm{L}}$, Héron considère alors la moyenne arithmétique de ces deux longueurs : $\mathrm{L}' = \frac{\mathrm{L} + \frac{a}{\mathrm{L}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{L} + \frac{a}{\mathrm{L}}\right)$.

On a immédiatement (propriété générale de la moyenne) : $\frac{a}{\mathrm{L}} < \mathrm{L}' < \mathrm{L}$.

Mais on a aussi : $\mathrm{L}' - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{L} + \frac{a}{\mathrm{L}}\right) - \sqrt{a} = \frac{\mathrm{L}^2 - 2\mathrm{L}\sqrt{a} + a}{2\mathrm{L}} = \frac{\left(\mathrm{L} - \sqrt{a}\right)^2}{2\mathrm{L}}$.

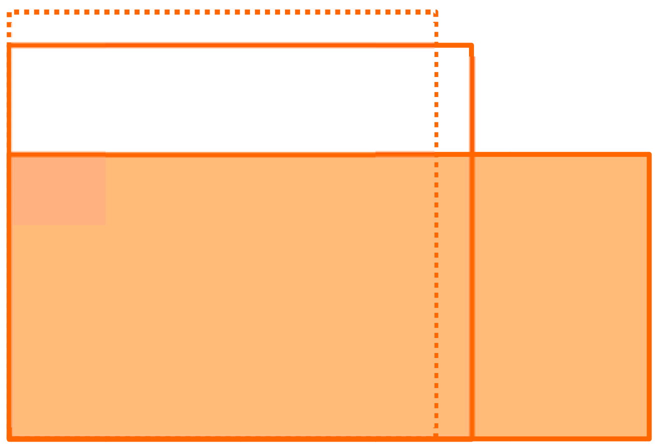
Cette différence étant strictement positive, on a immédiatement : $\mathrm{L}' > \sqrt{a}$. Puis, en raisonnant comme ci-dessus : $\frac{a}{\mathrm{L}'} < \sqrt{a}$.

Enfin, comme $L' < L$, on a : $\frac{a}{L} < \frac{a}{L'}$.

En définitive, on a :

$$\boxed{\frac{a}{L} < \frac{a}{L'} < \sqrt{a} < L' < L}$$

Sur la figure ci-après, on a fait apparaître le rectangle initial de dimensions L et $\frac{a}{L}$ (bords et remplissage oranges), le second rectangle, de dimensions $L' = \frac{1}{2}\left(L + \frac{a}{L}\right)$ et $\frac{a}{L'}$ (bords en orange, pas de remplissage) et le carré de côté $\sqrt{a}$ (bords pointillés orange, pas de remplissage).



En itérant ainsi le processus, on obtient des rectangles dont les longueurs des côtés vont converger vers la valeur $\sqrt{a}$: la figure limite sera le carré de côté $\sqrt{a}$.

L'algorithme sous une forme moderne

Définition

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \end{cases}$$

Résultats préliminaires

Notons d'abord que pour un entier naturel *n* quelconque fixé, si x_n est strictement positif, alors il en va de même pour $\frac{a}{x_n}$ et, de fait, pour x_{n+1}.
On a $x_0 > 0$.
Il découle de ce qui précède que la suite (x_n) est une suite à termes strictement positifs.

Il va (presque) de soi que l'on exclut la possibilité $x_0 = \sqrt{a}$ car elle sous-entendrait que l'on connaît la réponse à notre problème !
D'un point de vue mathématique, si $x_0 = \sqrt{a}$, on a : $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\right) = \sqrt{a}$.
On montre alors facilement par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{a}$.

Plus précisément, s'il existe un rang *N* tel que $x_N = \sqrt{a}$ alors on a : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sqrt{a}$.
En effet, d'après l'observation précédente, si $N = 0$, le résultat est immédiat.
Supposons donc $N > 0$.
On a immédiatement : $\forall n \geq N, x_n = \sqrt{a}$.
Mais on a aussi : $x_N = \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_{N-1} + \frac{a}{x_{N-1}}\right)$.
D'où $2\sqrt{a} = x_{N-1} + \frac{a}{x_{N-1}}$, soit : $x_{N-1}^2 - 2\sqrt{a}x_{N-1} + a = \left(x_{N-1} - \sqrt{a}\right)^2 = 0$.
Enfin : $x_{N-1} = \sqrt{a}$.
Finalement : $\forall n \leq N, x_n = \sqrt{a}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \sqrt{a}$.

Dans l'étude qui suit, on suppose donc : $\boxed{x_0 \neq \sqrt{a}}$ et on sait alors que tous les termes de la suite (x_n) seront différents de $\sqrt{a}$.

Etude de l'algorithme de Héron

Etude d'une fonction

La suite étudiée est une suite récurrente de la forme $x_{n+1} = f(x_n)$ où *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

La fonction *f* est dérivable en tant que fonction rationnelle et on a, pour tout *x* réel strictement positif :

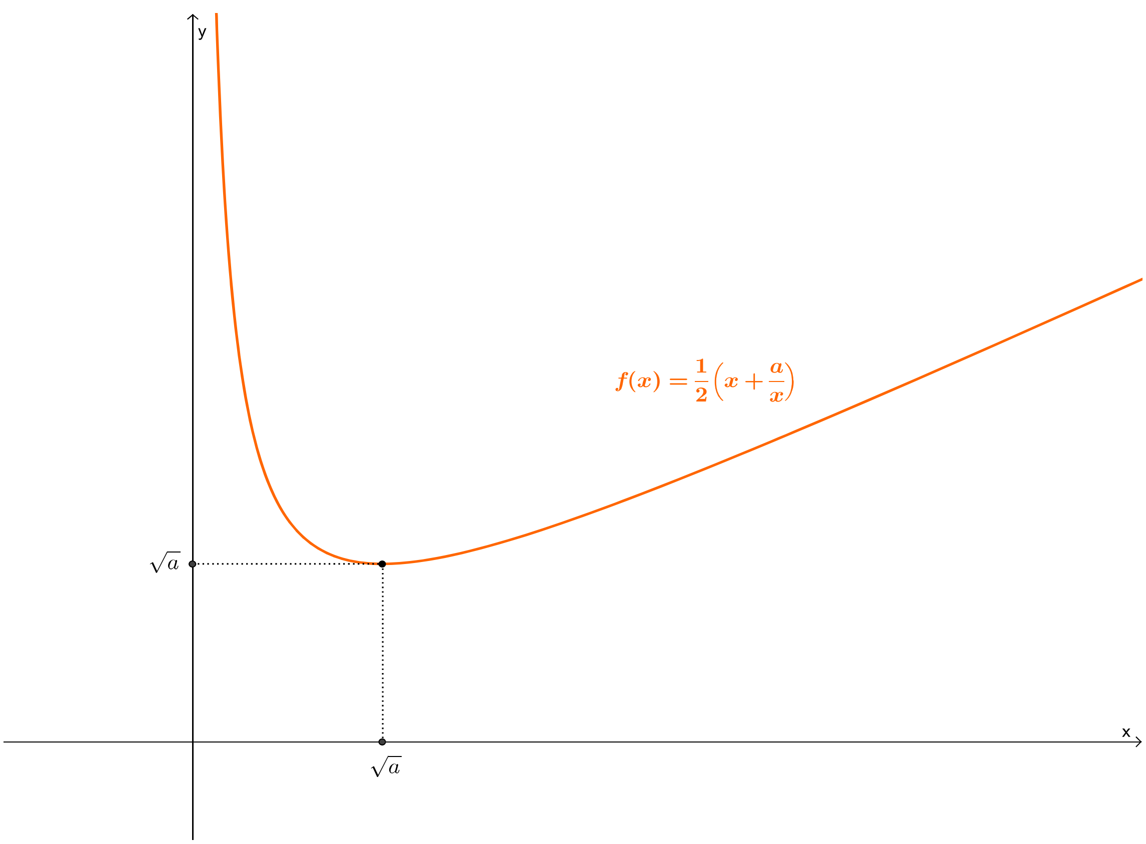
$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{x^2}\right)=\frac{x^2-a}{2x^2}=\frac{\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)}{2x^2}$$

Comme on a $x>0$, il vient immédiatement $2x^2>0$ et $x+\sqrt{a}>0$. Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $x-\sqrt{a}$. Il vient donc :

- Si $x\in\left]0\,;\sqrt{a}\right[$, $x-\sqrt{a}<0$ et $f'(x)<0$.
- $f'\left(\sqrt{a}\right)=0$.
- Si $x>\sqrt{a}$, $x-\sqrt{a}>0$ et $f'(x)<0$.

On déduit de ce qui précède que la fonction *f* est strictement décroissante sur l’intervalle $\left]0\,;\sqrt{a}\right]$ et strictement croissante sur l’intervalle $\left[\sqrt{a}\,;+\infty\right[$.
La fonction *f* admet donc un minimum global strict en $\sqrt{a}$ et on a $f\left(\sqrt{a}\right)=\sqrt{a}$.

Voici la courbe représentative de la fonction *f*.



Il en résulte que pour tout *x* réel de l’ensemble $\left]0\,;\sqrt{a}\right[\cup\left]\sqrt{a}\,;+\infty\right[$, on a : $f(x)>\sqrt{a}$.

Etude de la suite (x_n)

D'après l'étude précédente, si x_0 appartient à l'intervalle $\left]0\,;\sqrt{a}\right[$ alors on aura $x_1 = f(x_0) > \sqrt{a}$.

Nous pouvons donc limiter notre étude au seul cas : $x_0 > \sqrt{a}$.

Pour tout n entier naturel non nul, on a $x_n = f(x_{n-1}) > \sqrt{a}$.
Par ailleurs, on a : $x_0 > \sqrt{a}$.
En définitive, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\, x_n > \sqrt{a}$.

Ainsi :

La suite (x_n) est minorée par $\sqrt{a}$.

Pour tout n entier naturel, on a :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{x_n^2 + a - 2x_n^2}{2x_n} = \frac{a - x_n^2}{2x_n} = \frac{\left(\sqrt{a} - x_n\right)\left(\sqrt{a} + x_n\right)}{2x_n}$$

Comme $x_n > \sqrt{a} > 0$, on a : $\sqrt{a} + x_n > 0$ et $\sqrt{a} - x_n < 0$.
Il vient donc : $x_{n+1} - x_n < 0$.

La suite (x_n) est strictement décroissante.

Puisque la suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge.
Notons L sa limite.
Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N},\, x_n > \sqrt{a}$, il vient immédiatement : $L \geq \sqrt{a}$.
En tant que fonction rationnelle, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a donc classiquement : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(u_n) = f(L)$.
On va donc résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $\left[\sqrt{a}\,;+\infty\right[$.
On a :

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{a} \\ f(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{a} \\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{a} \\ x + \frac{a}{x} = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{a} \\ a = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$$

On a donc : $L=\sqrt{a}$.

La suite (x_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Sur la convergence de l'algorithme

Une suite de rationnels

Supposons que *a* soit un rationnel.

Soit *n* un entier naturel quelconque fixé.

Supposons que x_n soit rationnel. Il en va alors de même pour $\frac{a}{x_n}$ et $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$.

Si x_0 est un rationnel, on en déduit immédiatement que la suite (x_n) est une suite de rationnels ($(x_n)\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$).

Ce résultat est extrêmement intéressant : l'algorithme de Héron permet donc d'approcher des irrationnels, par exemple $\sqrt{2}$, par des suites de rationnels (prendre pour cet exemple $a=2$ donc et x_0 quelconque dans $\mathbb{Q}_+^*$).

Ainsi, avec $a=2$ et $x_0=1$, on obtient :

$$x_1=\frac{3}{2}=1,5$$
$$x_2=\frac{17}{12}\simeq 1,416\,666\,667$$
$$x_3=\frac{577}{408}\simeq 1,414\,215\,686$$
$$x_4=\frac{665\,857}{470\,832}\simeq 1,414\,213\,562$$

La convergence est très rapide (voir la partie suivante) : avec x_4 on dispose déjà des 9 premières décimales de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$.

Evidemment, si x_0 est plus grand, une telle précision sera atteinte moins vite ! Par exemple, avec $x_0 = 7$, on obtient :

$$x_1 = \frac{51}{14} = 3,642\,857\,143$$

$$x_2 = \frac{2\,993}{1\,428} \simeq 2,095\,938\,375$$

$$x_3 = \frac{13\,036\,417}{8\,548\,008} \simeq 1,525\,082\,452$$

$$x_4 = \frac{316\,085\,049\,734\,017}{222\,870\,793\,614\,672} \simeq 1,418\,243\,479$$

Rapidité de la convergence de l'algorithme de Héron

On s'intéresse ici classiquement à la différence : $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a}$ (écart du terme courant x_n à la limite de la suite (x_n)).

En tenant compte de la définition de la suite (x_n), on a :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= x_{n+1} - \sqrt{a} \\
&= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} \\
&= \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n} \\
&= \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2}{2x_n} \\
&= \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n}
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{\varepsilon_n^2}{2x_n}}{\dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{a}}{x_n} = 1$, c'est-à-dire : $\varepsilon_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$.

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}}$$

La suite $\left(\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2}\right)$ étant convergente, on qualifie la convergence de la suite (x_n) de « quadratique ». Une telle convergence est très rapide.

La suite (x_n) converge quadratiquement vers $\sqrt{a}$

Comportement asymptotique de $x_n - x_{n+1}$

On a vu précédemment que l'on avait : $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\left(\sqrt{a} - x_n\right)\left(\sqrt{a} + x_n\right)}{2x_n}$.

En utilisant $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a}$, il vient alors :

$$x_n - x_{n+1} = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a} + x_n\right)}{2x_n} = \frac{\varepsilon_n\left(\varepsilon_n + 2\sqrt{a}\right)}{2\left(\varepsilon_n + \sqrt{a}\right)} = \varepsilon_n \frac{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{2\sqrt{a}}}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{a}}}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, il vient immédiatement : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n - x_{n+1}}{\varepsilon_n} = 1$, soit, finalement :

$$\boxed{x_n - x_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \varepsilon_n}$$

Comme $\varepsilon_n > 0$ pour tout n entier naturel, on a également : $1 < 1 + \dfrac{\varepsilon_n}{2\sqrt{a}} < 1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{a}}$.

Il en découle : $\dfrac{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{2\sqrt{a}}}{1 + \dfrac{\varepsilon_n}{\sqrt{a}}} < 1$ et, finalement :

$$\boxed{x_n - x_{n+1} < \varepsilon_n}$$

Mise en œuvre de l'algorithme

Pour une mise en œuvre complète, on se reportera au document PanaMaths correspondant.

Le cœur de l'algorithme ne pose pas, d'un point de vue calculatoire, de problème particulier (on obtient facilement x_{n+1} à partir de x_n et ce calcul est effectué un certain nombre de fois dans un boucle). En revanche, on doit se poser une question essentielle : combien d'itérations doit-on effectuer dans la boucle ?

Ce qui nous intéresse, c'est de pouvoir majorer la différence $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a}$.

En étudiant sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\left(x+2\sqrt{a}\right)}{2\left(x+\sqrt{a}\right)}$ on peut conjecturer puis montrer que l’on a : $f(x)-\dfrac{x}{2}>0$.

A partir de $x_n - x_{n+1} = \dfrac{\varepsilon_n\left(\varepsilon_n+2\sqrt{a}\right)}{2\left(\varepsilon_n+\sqrt{a}\right)}$, on a, de façon équivalente :

$$\begin{aligned}
\left(x_n - x_{n+1}\right)-\frac{\varepsilon_n}{2} &= \frac{\varepsilon_n^2+2\sqrt{a}\,\varepsilon_n}{2\left(\varepsilon_n+\sqrt{a}\right)}-\frac{\varepsilon_n}{2}\\
&= \frac{\varepsilon_n^2+2\sqrt{a}\,\varepsilon_n-\varepsilon_n\left(\varepsilon_n+\sqrt{a}\right)}{2\left(\varepsilon_n+\sqrt{a}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{a}\,\varepsilon_n}{2\left(\varepsilon_n+\sqrt{a}\right)}
\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel *n*, on a : $\dfrac{\sqrt{a}\,\varepsilon_n}{2\left(\varepsilon_n+\sqrt{a}\right)}>0$.

On en déduit : $\left(x_n - x_{n+1}\right)-\dfrac{\varepsilon_n}{2}>0$, soit : $\boxed{\varepsilon_n < 2\left(x_n - x_{n+1}\right)}$.

Cette majoration est essentielle puisque la différence $x_n - x_{n+1}$ est directement accessible à chaque étape de la boucle.

Si on souhaite que la différence $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à une valeur ε fixée d’avance, il suffira d’avoir $x_n - x_{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour que l’on ait effectivement $\varepsilon_n < \varepsilon$.
Ainsi, la boucle du calcul de x_{n+1} devra être répétée tant que la différence $x_n - x_{n+1}$ est supérieure ou égale à $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Dans l’algorithme ci-après, la variable A correspond au réel strictement positif dont on cherche la racine carrée, la variable EPSILON à la majoration de $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{a}$ et les variables X et Y à x_n et x_{n+1} respectivement.

```
Nombres réels : A, X, Y, EPSILON

Lire A
Lire X
Lire EPSILON
Y ← 0.5*(X+A/X)

Tant que X – Y supérieur ou égal à EPSILON/2 faire
     X ← Y
     Y ← 0.5*(X+A/X)
Fin Tant que

Afficher Y
```

Autour de l'algorithme

L'algorithme de Newton

L'algorithme de Newton est un algorithme classique et très performant visant à résoudre des équations de la forme $f(x)=0$ sur un intervalle $[a\,;b]$ où la fonction *f* est dérivable et strictement monotone.

L'algorithme est défini comme suit :

$$\begin{cases} x_0 \in [a\,;b] \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Avec la fonction $f : x \mapsto x^2 - a$, on obtient :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(2x_n - \frac{x_n^2 - a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(2x_n - x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

On retrouve la relation de récurrence qui caractérise l'algorithme de Héron ! Celui-ci est donc un cas particulier de l'algorithme de Newton, cas particulier obtenu en appliquant ce dernier à la fonction $x \mapsto x^2 - a$.

L'algorithme de Héron est obtenu en appliquant l'algorithme de Newton à la fonction $x \mapsto x^2 - a$.

Au-delà de la racine carrée

En utilisant encore l’algorithme de Newton mais en l’appliquant cette fois à la fonction $f : x \mapsto x^p - a$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un réel strictement positif, on va pouvoir résoudre numériquement l’équation $x^p = a$, c'est-à-dire extraire la racine $p$ième du réel a. Comme $f'(x) = p\,x^{p-1}$, on obtient cette fois la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^p - a}{p\,x_n^{p-1}} = \frac{(p-1)x_n^p + a}{p\,x_n^{p-1}} = \frac{1}{p}\left[(p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right]$$

On dispose ainsi de la suite récurrente suivante permettant d’obtenir la racine $p$ième d’un réel strictement positif :

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{p}\left[(p-1)x_n + \dfrac{a}{x_n^{p-1}}\right] \end{cases}}$$

Par exemple pour $p = 5$:

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left[4x_n + \dfrac{a}{x_n^4}\right] \end{cases}$$

On notera que :

- pour $p = 2$, on retrouve l’algorithme de Héron.
- Ici encore, lorsque le premier terme de la suite est rationnel, il en va de même pour tous les autres.