Article PanaMaths

→ Irrationalité de *e*

Introduction

Le nombre *e*, base des logarithmes népériens, est bien connu des élèves de terminale.

Dans cette note de lecture, on commence par établir que ce nombre est la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (plus tard, on parle plutôt de la série de terme général $\frac{1}{n!}$). Une fois ce résultat établi, on peut alors accéder à un autre résultat, très important : l'irrationalité de *e*. C'est le but de cette note de lecture et on verra que les notions et raisonnements utilisés appartiennent tous aux programmes des classes de terminale (S et ES).

En fin de collège, on peut facilement établir l'irrationalité du nombre $\sqrt{2}$. En terminale, on accède à celle du nombre *e*. Celle de π, probablement la plus célèbre de toutes les constantes mathématiques, requiert des notions qui ne sont malheureusement pas au programme des classes de terminale et sa démonstration est nettement plus délicate que les deux autres.

La suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Dans un premier temps, nous allons établir le premier résultat fondamental suivant :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \right) = e$$

En fait ce résultat est un cas particulier du résultat plus général (hors programme) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x$$

C'est ce résultat qui est à l'origine de la démarche ci-dessous.

Pour *n* entier naturel non nul, on considère d'abord la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x}$$

On note que l'on a : $f(0)=1$ et $f(1)=u_n \times e^{-1}=\frac{u_n}{e}$.

Par ailleurs, la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction polynôme et l'inverse de la fonction exponentielle).
Pour tout réel positif, on a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(0+\frac{1}{1!}+\frac{2x}{2!}+\ldots+\frac{n\times x^{n-1}}{n!}\right)e^{-x}-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} \\ &= \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x}-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} \\ &= -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \end{aligned}$$

Pour *x* non nul, on a donc : $f'(x)<0$ et on en déduit immédiatement que la fonction *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc : $f(1)<f(0)$, soit : $\frac{u_n}{e}<1$. D'où : $u_n<e \quad (1)$.

Considérons maintenant la fonction *g* définie, également sur $\mathbb{R}_+$, par :

$$g(x)=f(x)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

On a immédiatement : $g(0)=f(0)=1$ et $g(1)=f(1)+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{u_n}{e}+\frac{1}{(n+1)!}$.

Par ailleurs, la fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (la fonction *f* et une fonction polynôme).
Pour tout réel positif, on a alors :

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)+\frac{(n+1)\times x^n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}+\frac{(n+1)\times x^n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{x^n}{n!}e^{-x}+\frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^n}{n!}\left(1-e^{-x}\right) \\ &= \frac{x^n}{n!}\times\frac{e^x-1}{e^x} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout *x* strictement positif, on a : $e^x-1>0$ et donc : $g'(x)>0$. On en déduit immédiatement que la fonction *g* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a donc : $g(1)>g(0)$, soit : $\frac{u_n}{e}+\frac{1}{(n+1)!}>1$. D'où : $u_n>e-\frac{e}{(n+1)!} \quad (2)$.

En définitive, les deux inégalités (1) et (2) obtenues ci-dessus donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, e - \frac{e}{(n+1)!} < u_n < e$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} ((n+1)!) = +\infty$, on a immédiatement : $\lim_{n \to +\infty} \left(e - \frac{e}{(n+1)!} \right) = e$ et le théorème des gendarmes nous permet de conclure immédiatement :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = e$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e}$$

La notation « $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ » est hors programme mais ne pose pas de difficulté particulière.

Deux suites adjacentes

On considère maintenant la suite (u_n) et la suite (v_n) suivante :

Pour tout n entier naturel non nul :

$$v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} = u_n + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

On peut en calculer facilement quelques termes :

- $u_0 = \boxed{1}$, $u_1 = 1 + \frac{1}{1!} = \boxed{2}$, $u_2 = u_1 + \frac{1}{2!} = 2 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}} = 2,5$,
  $u_3 = u_2 + \frac{1}{3!} = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{8}{3}} \simeq 2,67$, $u_4 = u_3 + \frac{1}{4!} = \frac{8}{3} + \frac{1}{24} = \boxed{\frac{65}{24}} \simeq 2,708$, etc.
- $v_0 = u_0 + 1 = 1 + 1 = \boxed{2}$, $v_1 = u_1 + \frac{1}{1!} = 2 + 1 = \boxed{3}$, $v_2 = u_2 + \frac{1}{2!} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{3}$,
  $v_3 = u_3 + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{17}{6}} \simeq 2,83$, $v_4 = u_4 + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} + \frac{1}{24} = \boxed{\frac{11}{4}} = 2,75$, etc.

La suite (u_n) semble croissante et la suite (v_n) semble décroissante à partir de $n = 1$ (on pourra avantageusement utiliser un tableur pour calculer davantage de termes et étayer un peu plus la seconde « conjecture », moins « évidente » que la première …). Nous allons en fait montrer que ces deux suites sont adjacentes.

On a facilement, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \\ &= \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\right)-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel n non nul, on a : $(n+1)!>0$ et donc : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$.

On en déduit ainsi que la suite (u_n) est strictement croissante.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= u_{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}-u_n-\frac{1}{n!} \\ &= u_{n+1}-u_n+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!}-\frac{1}{n!} \\ &= \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1-n}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel n non nul, on a : $1-n\leq 0$ (et même $1-n<0$ à partir de $n=2$).
On en déduit ainsi que la suite (v_n) est décroissante (et même strictement décroissante à partir de $n=2$).

Enfin, nous avons : $v_n-u_n=\frac{1}{n!}$.

Comme : $\lim_{n\to+\infty} n!=+\infty$, on a immédiatement : $\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$.

Comme les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement (strictement) croissantes et (à partir de $n=2$, strictement) décroissantes et que la suite (u_n-v_n) tend vers 0, on en conclut finalement que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
De fait, elles convergent vers une même limite qui est, d'après le résultat obtenu dans la partie précédente, le nombre *e*.

Nous pouvons finalement écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

Irrationalité de *e*

Pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, on a, les monotonies étant strictes :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 2 \Rightarrow u_n < e < v_n$$

Supposons que e soit un nombre rationnel. e étant strictement positif. On peut alors l'écrire : $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels premiers entre eux.

Comme $2,5 = u_2 < e < v_2 = 3$, le nombre e n'est pas entier et on en déduit immédiatement que l'entier q est supérieur ou égal à 2. On a donc :

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q$$

Soit :

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{q!}$$

En multipliant tous les membres de cette double inégalité par $q!$, il vient :

$$\begin{aligned}
&1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!} < \frac{p}{q} < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{q!}\\
\Leftrightarrow &\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right)\times q! < \frac{p}{q}\times q! < \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{q!}\right)\times q!\\
\Leftrightarrow &\, q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{(q-1)!}+\frac{q!}{q!} < p\times(q-1)! < q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{(q-1)!}+\frac{q!}{q!}+\frac{q!}{q!}
\end{aligned}$$

Posons alors : $N = q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\ldots+\frac{q!}{(q-1)!}+\frac{q!}{q!}$. Comme, pour tout entier naturel k dans $[\![0\,;q]\!]$, le rapport $\frac{q!}{k!}$ est un entier naturel, il en va de même pour le nombre N.

On a finalement :

$$N < p\times(q-1)! < N+1$$

Cette situation est absurde puisque l'entier $p\times(q-1)!$ ne peut être encadré, strictement, par deux entiers consécutifs (N et $N+1$). Ayant abouti à une contradiction, nous pouvons affirmer que l'hypothèse initiale est erronée : e n'est pas un nombre rationnel.

Le nombre e, base des logarithmes népériens, n'est pas rationnel.

Quelques décimales pour finir …

Pour finir, nous fournissons ci-dessous l'écriture décimale de e en faisant apparaître les 500 premières décimales :

e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663
035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429
526059563073813232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408
914993488416750924476146066808226480016847741185374234544243710753907774499
206955170276183860626133138458300075204493382656029760673711320070932870912
744374704723069697720931014169283681902551510865746377211125238978442505695
369677078544996996794686445490598793163688923009879312773617821542499922957
635148220826989519366803318252886939849646510582093923982948879332036250944
311730123819706841614039701983767932068328237646480429531180232878250981945
581530175671736133206981125099618188159304169035159888851934580727386673858
942287922849989208680582574927961048419844436346324496848756023362482704197
862320900216099023530436994184914631409343173814364054625315209618369088870
701676839642437814059271456354906130310720851038375051011574770417189861068
7396965521267154688957035035…