Article PanaMaths

→ Irrationalité de π

Introduction

Constante parmi les constantes, π justifie, par sa richesse, qu'on lui consacre des ouvrages entiers. Rapidement présentée dès les premières classes du secondaire comme coefficient de proportionnalité entre le périmètre du cercle et la longueur d'un de ses diamètres, ses propriétés ne se dévoilent dans les programmes que petit à petit, souvent partiellement et fréquemment sans démonstration. Bien souvent, il faut attendre l'enseignement supérieur pour les découvrir.

C'est le cas de l'irrationalité de π que nous allons établir ici via, classiquement, un raisonnement par l'absurde. Nous allons donc supposer qu'il existe deux entiers naturels non nuls, a et b, tels que : $\pi = \frac{a}{b}$.

Une fois encore, ce sont les polynômes qui vont nous être d'une grande utilité, le rationnel $\frac{a}{b}$ étant racine du polynôme à coefficients entiers : $bX - a$.
On considère en fait la suite de polynômes $\left(P_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n\left(X\right) = \frac{1}{n!} X^n \left(bX - a\right)^n$$

Plus précisément, on va s'intéresser à la suite d'intégrales $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^\pi P_n\left(x\right) \sin x\, dx$$

On « joue » ainsi sur deux tableaux : π annule la fonction sinus et le rationnel $\frac{a}{b}$ est racine de P_n … Pour le reste, poursuivez votre lecture !

Quelques résultats sur la suite (P_n)

Calcul des dérivées

En posant $Q_n(X) = X^n$ et $R_n(X) = (bX - a)^n$, la formule de Leibniz nous donne, pour tout entier naturel k :

$$P_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} Q_n^{(i)} R_n^{(k-i)} \qquad \text{(E)}$$

On va donc, dans un premier temps, s'intéresser aux polynômes dérivés des polynômes Q_n et R_n.

On garde présent à l'esprit que ces deux polynômes sont de degré *n*.

Pour tout entier naturel *j* inférieur ou égal à *n*, on a immédiatement :

$$Q_n^{(j)}(X) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)X^{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!}X^{n-j}$$

Si *j* est strictement supérieur à *n*, on a bien sûr : $Q_n^{(j)}(X) = 0$.

En définitive :

$$Q_n^{(j)}(X) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-j)!}X^{n-j} & \text{pour } j \in [\![0\,;n]\!] \\ 0 & \text{pour } j > n \end{cases}$$

La dérivation du polynôme R_n est tout à fait similaire.

Pour tout entier naturel *j* inférieur ou égal à *n*, on a immédiatement :

$$R_n^{(j)}(X) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)b^j X^{n-j} = \frac{n!}{(n-j)!}b^j X^{n-j}$$

Si *j* est strictement supérieur à *n*, on a bien sûr : $R_n^{(j)}(X) = 0$.

En définitive :

$$R_n^{(j)}(X) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-j)!}b^j (bX-a)^{n-j} & \text{pour } j \in [\![0\,;n]\!] \\ 0 & \text{pour } j > n \end{cases}$$

Ainsi, dans la somme du membre de droite de l'égalité (E), on doit distinguer différentes situations selon la valeur de l'entier k en notant que les entiers i et $k-i$ varient tous les deux dans $[\![0\,;k]\!]$:

- Si $k \le n$, tous les polynômes dérivés apparaissant dans la somme $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}Q_n^{(i)}R_n^{(k-i)}$ sont non nuls et on a :

  $$P_n^{(k)}(X)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}Q_n^{(i)}(X)R_n^{(k-i)}(X)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-k+i)!}b^{k-i}X^{n-i}(bX-a)^{n-k+i}$$

  Remarque : pour $k=0$, celle formule donne :

  $$P_n^{(0)}(X)=\frac{1}{n!}\binom{0}{0}\frac{n!}{(n-0)!}\frac{n!}{(n-0+0)!}b^{0-0}X^{n-0}(bX-a)^{n-0+0}=\frac{1}{n!}X^n(bX-a)^n=P_n(X)$$

  L'ordre de dérivation 0 redonne formellement le polynôme initial.

- Si $n<k\le 2n$, certains polynômes dérivés dans la somme $\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}Q_n^{(i)}R_n^{(k-i)}$ sont nuls.

  Plus précisément : si $i>n$, on a $Q_n^{(i)}=0$ et si $i<k-n$ (c'est-à-dire $k-i>n$), on a : $R_n^{(k-i)}=0$. On a donc, dans ce cas :

  $$P_n^{(k)}(X)=\frac{1}{n!}\sum_{i=k-n}^{n}\binom{k}{i}Q_n^{(i)}(X)R_n^{(k-i)}(X)=\frac{1}{n!}\sum_{i=k-n}^{n}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-k+i)!}b^{k-i}X^{n-i}(bX-a)^{n-k+i}$$

- Si $k>2n$, on a : $P_n^{(k)}=0$.

En résumé :

- Si $k\le n$: $P_n^{(k)}(X)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-k+i)!}b^{k-i}X^{n-i}(bX-a)^{n-k+i}$.
- Si $n<k\le 2n$: $P_n^{(k)}(X)=\frac{1}{n!}\sum_{i=k-n}^{n}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-k+i)!}b^{k-i}X^{n-i}(bX-a)^{n-k+i}$.
- Si $k>2n$: $P_n^{(k)}=0$.

Valeurs particulières

Nous allons maintenant montrer que, pour tout n entier naturel non nul, toutes les dérivées de P_n prennent des valeurs entières en 0 et en $\frac{a}{b}$.

Soit donc n un entier naturel non nul.
Le polynôme P_n étant de degré $2n$, on va se limiter à $k\in[\![0\,;2n]\!]$.

$\boxed{\text{Pour } X = 0.}$

On s’intéresse au facteur « X^{n-i} » apparaissant dans les sommes correspondant dans les expressions de $P_n^{(k)}(X)$.

L’exposant de « X » est non nul pour $i \neq n$. On en déduit immédiatement :

- Pour $0 \leq k < n$ ou $n < k < 2n$: $P_n^{(k)}(0) = 0$.
- Pour $k = n$, on a :

$$\begin{aligned} P_n^{(n)}(X) &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{i!}b^{n-i}X^{n-i}(bX-a)^i \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{i!}b^{n-i}X^{n-i}(bX-a)^i + \frac{1}{n!}\binom{n}{n}\frac{n!}{(n-n)!}\frac{n!}{n!}b^0(bX-a)^n \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{i!}b^{n-i}X^{n-i}(bX-a)^i + (bX-a)^n \end{aligned}$$

  D’où :

$$P_n^{(n)}(0) = (b\times 0 - a)^n = (-a)^n \in \mathbb{Z}$$

- Pour $k = 2n$, on a :

$$\begin{aligned} P_n^{(2n)}(X) &= \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{n}\binom{2n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(-n+i)!}b^{2n-i}X^{n-i}(bX-a)^{-n+i} \\ &= \frac{1}{n!}\binom{2n}{n}\frac{n!}{0!}\frac{n!}{0!}b^{2n-n}X^0(bX-a)^0 \\ &= \frac{(2n)!}{n!}b^n \end{aligned}$$

  D’où :

$$P_n^{(2n)}(0) = \frac{(2n)!}{n!}b^n \in \mathbb{N}$$

En définitive :

- $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n, 2n\}$, $P_n^{(k)}(0) = 0$.
- $P_n^{(n)}(0) = (-a)^n$.
- $P_n^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}b^n$.

Ainsi, quel que soit l’ordre de dérivation *k*, on a $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{Pour } X = \frac{a}{b}.}$

On s'intéresse cette fois au facteur « $(bX-a)^{n-k+i}$ » apparaissant dans les sommes correspondant dans les expressions de $P_n^{(k)}(X)$.

L'exposant de « $bX-a$ » est non nul pour $i \neq k-n$. On en déduit immédiatement :

- Pour $0 \le k < n$ on a $n-k+i > 0$ pour tout i dans $[\![0\,;k]\!]$ et donc : $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.

- Pour $k = n$, on a :

$$\begin{aligned}
P_n^{(n)}(X) &= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{i!}b^{n-i}X^{n-i}(bX-a)^i \\
&= \frac{1}{n!}\binom{n}{0}\frac{n!}{(n-0)!}\frac{n!}{0!}b^{n-0}X^n + \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{i!}b^{n-i}X^{n-i}(bX-a)^i \\
&= b^nX^n + \frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{i!}b^{n-i}X^{n-i}(bX-a)^i
\end{aligned}$$

D'où :

$$P_n^{(n)}\left(\frac{a}{b}\right) = b^n\left(\frac{a}{b}\right)^n = b^n \times \frac{a^n}{b^n} = a^n \in \mathbb{N}$$

- Pour $n < k < 2n$ on a $n-k+i = 0$ pour $i = k-n$ et donc :

$$\begin{aligned}
P_n^{(k)}(X) &= \frac{1}{n!}\sum_{i=k-n}^{n}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-k+i)!}b^{k-i}X^{n-i}(bX-a)^{n-k+i} \\
&= \frac{1}{n!}\binom{k}{k-n}\frac{n!}{(n-(k-n))!}\frac{n!}{(n-k+(k-n))!}b^{k-(k-n)}X^{n-(k-n)} \\
&\qquad + \frac{1}{n!}\sum_{i=k-n+1}^{n}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-k+i)!}b^{k-i}X^{n-i}(bX-a)^{n-k+i} \\
&= \binom{k}{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}b^nX^{2n-k} + \frac{1}{n!}\sum_{i=k-n+1}^{n}\binom{k}{i}\frac{n!}{(n-i)!}\frac{n!}{(n-k+i)!}b^{k-i}X^{n-i}(bX-a)^{n-k+i}
\end{aligned}$$

D'où :

$$P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = \binom{k}{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}b^n\left(\frac{a}{b}\right)^{2n-k} = \binom{k}{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}a^{2n-k}b^{k-n}$$

On a $\frac{n!}{(2n-k)!} \in \mathbb{N}$ car $n < k \Rightarrow 2n-k < n$. Par ailleurs, $n < k < 2n \Rightarrow 2n-k > 0$ et $k-n > 0$. Ainsi, on a $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{N}$.

- Pour $k=2n$, on a encore : $P_n^{(2n)}(X)=\frac{(2n)!}{n!}b^n$ et donc : $P_n^{(2n)}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{(2n)!}{n!}b^n$.

En définitive :

- $\forall k\in[\![0\,;n-1]\!],\ P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)=0$.
- $P_n^{(n)}\left(\frac{a}{b}\right)=a^n$.
- $\forall k\in\mathbb{N}\,/\,n<k<2n,\ P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)=\binom{k}{k-n}\frac{n!}{(2n-k)!}a^{2n-k}b^{k-n}$
- $P_n^{(2n)}\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{(2n)!}{n!}b^n$

Ainsi, quel que soit l'ordre de dérivation *k*, on a $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)\in\mathbb{Z}$.

On a finalement la conclusion générale :

> Pour tout entier naturel *k*, la dérivée d'ordre *k* de P_n prend
> pour $X=0$ et pour $X=\frac{a}{b}$ des valeurs entières.

Une suite d'intégrales

Comme annoncé dans l'introduction, nous allons désormais nous intéresser à la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des intégrales définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n=\int_0^{\pi}P_n(x)\sin x\,dx$$

Convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Notons d'abord que l'on a, pour tout *x* réel : $P_n(x)=\frac{1}{n!}\left[x(bx-a)\right]^n$.

La fonction $x\mapsto x(bx-a)$ est une fonction polynôme du second degré qui prend des valeurs négatives sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{a}{b}\right]$ et admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ en $\frac{a}{2b}$. La valeur de ce minimum est : $\frac{a}{2b}\left(b\times\frac{a}{2b}-a\right)=-\frac{a^2}{4b}$.

Ainsi :

- Si n est <u>impair</u>, on a : $\forall x\in\left[0\,;\frac{a}{b}\right],\ P_n\left(x\right)=\frac{1}{n!}\left[x\left(bx-a\right)\right]^n\le 0$.
- Si n est <u>pair</u>, on a : $\forall x\in\left[0\,;\frac{a}{b}\right],\ P_n\left(x\right)=\frac{1}{n!}\left[x\left(bx-a\right)\right]^n\ge 0$.

Comme la fonction sinus prend des valeurs positives sur l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]=\left[0\,;\frac{a}{b}\right]$, on en déduit finalement que la fonction $\varphi_n : x\mapsto P_n\left(x\right)\sin x$ garde un signe constant sur l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$: négatif si n est impair et positif si n est pair.

On a alors, en tenant compte de $\forall x\in\left[0\,;\pi\right],\ 0\le\sin x\le 1$:

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|I_n\right|=\left|\int_0^\pi P_n\left(x\right)\sin x\,dx\right|=\int_0^\pi\left|P_n\left(x\right)\sin x\right|dx=\int_0^\pi\left|P_n\left(x\right)\right|\sin x\,dx\le\int_0^\pi\left|P_n\left(x\right)\right|dx$$

En notant que la fonction polynôme $x\mapsto P_n\left(x\right)$ est la composée de la fonction $x\mapsto x\left(bx-a\right)$ et de la fonction $x\mapsto\frac{1}{n!}x^n$, on facilement : $\forall x\in\left[0\,;\pi\right],\ 0\le\left|P_n\left(x\right)\right|\le\frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$.

On en déduit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|I_n\right|\le\int_0^\pi\left|P_n\left(x\right)\right|dx\le\frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n$$

En utilisant, par exemple, la formule de Stirling, on a :

$$\frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}\frac{\pi}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{n}\left(\frac{4b}{ea^2}n\right)^n}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\frac{4b}{ea^2}n\right)^n=+\infty$, il vient immédiatement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n!}\left(\frac{a^2}{4b}\right)^n=0$.

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|I_n\right|=0$ et, finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0}$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers !

Les fonctions P_n et sinus sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc, à fortiori, sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. Ainsi, pour tout entier naturel *n* non nul, nous pouvons transformer I_n en procédant à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^\pi \underbrace{P_n(x)}_{u(x)}\underbrace{\sin x}_{v'(x)}\,dx \\
&= \left[-P_n(x)\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi P_n^{(1)}(x)\cos x\,dx \\
&= P_n(\pi)+P_n(0)+\int_0^\pi P_n^{(1)}(x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

Nous pouvons poursuivre :

$$\begin{aligned}
I_n &= P_n(\pi)+P_n(0)+\int_0^\pi \underbrace{P_n^{(1)}(x)}_{u(x)}\underbrace{\cos x}_{v'(x)}\,dx \\
&= P_n(\pi)+P_n(0)+\cancel{\left[P_n^{(1)}(x)\sin x\right]_0^\pi} - \int_0^\pi P_n^{(2)}(x)\sin x\,dx \\
&= P_n(\pi)+P_n(0)-\int_0^\pi \underbrace{P_n^{(2)}(x)}_{u(x)}\underbrace{\sin x}_{v'(x)}\,dx \\
&= P_n(\pi)+P_n(0)-\left[-P_n^{(2)}(x)\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi P_n^{(3)}(x)\cos x\,dx \\
&= P_n(\pi)+P_n(0)-P_n^{(2)}(\pi)-P_n^{(2)}(0)-\int_0^\pi P_n^{(3)}(x)\cos x\,dx
\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que l'on a $P_n^{(2n+1)}=0$, il vient :

$$\begin{aligned}
I_n &= P_n(\pi)+P_n(0)-P_n^{(2)}(\pi)-P_n^{(2)}(0)+P_n^{(4)}(\pi)+P_n^{(4)}(0)+\ldots+(-1)^n P_n^{(2n)}(0)+(-1)^n P_n^{(2n)}(\pi) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left[P_n^{(2i)}(\pi)+P_n^{(2i)}(0)\right]
\end{aligned}$$

D'après la partie précédente, nous avons $\forall i\in[\![0\,;n]\!],\ P_n^{(2i)}(\pi)=P_n^{(2i)}\left(\dfrac{a}{b}\right)\in\mathbb{Z}$ et $P_n^{(2i)}(0)\in\mathbb{Z}$.

On en conclut alors : $I_n\in\mathbb{Z}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ I_n\in\mathbb{Z}}$$

Remarque : l'expression de I_n obtenue ci-dessus ne fait apparaître que des dérivées d'ordre pair de la fonction polynôme P_n. De façon rigoureusement équivalente, nous aurions pu poser $I_n = \int_0^\pi P_n(x)\cos x\,dx$, auquel cas, on aurait obtenu :

$$\begin{aligned} I_n &= -P_n^{(1)}(\pi) - P_n^{(1)}(0) + P_n^{(3)}(\pi) + P_n^{(3)}(0) - \ldots + (-1)^n P_n^{(2n-1)}(0) + (-1)^n P_n^{(2n-1)}(\pi) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1}\left[P_n^{(2i+1)}(\pi) + P_n^{(2i+1)}(0)\right] \end{aligned}$$

Ce sont cette fois les dérivées d'ordres impairs qui nous auraient permis de conclure (à l'identique …)

Irrationalité de π

Dans la partie précédente, nous avons établi que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ était une suite d'entiers convergeant vers 0. Une telle suite est nulle à partir d'un certain rang. En effet, en considérant, par exemple, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, la convergence vers 0 garantit l'existence d'une entier N tel que $n > N \Rightarrow |I_n| < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $n > N \Rightarrow |I_n| = 0$.

Pour tout entier n strictement supérieur à N, on a donc : $\int_0^\pi P_n(x)\sin x\,dx = 0$.
Mais nous avons également vu dans la partie précédente que, pour tout n entier naturel non nul, la fonction $\varphi_n : x \mapsto P_n(x)\sin x$ gardait un signe constant sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. Cette fonction étant continue sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ comme produit de deux fonctions continues sur cet intervalle, la nullité de l'intégrale I_n entraîne celle de φ_n. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0\,;\pi],\ P_n(x)\sin x = 0$$

Comme on a : $\forall x \in \left]0\,;\pi\right[,\ \sin x \neq 0$ et $P_n(0) = P_n(\pi) = P_n\left(\frac{a}{b}\right) = 0$, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0\,;\pi],\ P_n(x) = 0$$

Une fonction polynôme s'annulant sur un intervalle de longueur non nulle est nulle sur $\mathbb{R}$ et donc sur cet intervalle. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = 0$, ce qui est absurde puisque pour tout n entier naturel non nul, la fonction polynôme P_n ne s'annule qu'en 0 et en $\frac{a}{b}$.
On a finalement abouti à une contradiction : π n'est pas rationnel !

$$\boxed{\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$$

Quelques décimales pour finir …

Pour finir, nous fournissons ci-dessous l'écriture décimale de π en faisant apparaître ses 1 000 premières décimales :

π = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923
0781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172
5359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933
4461284756482337867831652712019091456485669234603486104543266482133936072
6024914127372458700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133
0530548820466521384146951941511609433057270365759591953092186117381932611793
1051185480744623799627495673518857527248912279381830119491298336733624406
5664308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846
7669405132000568127145263560827785771342757789609173637178721468440901224953
4301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344181598136297
7477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690
8302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177
6691473035982534904287554687311595628638823537875937519577818577805321712
268066130019278766111959092164201989…