Article PanaMaths

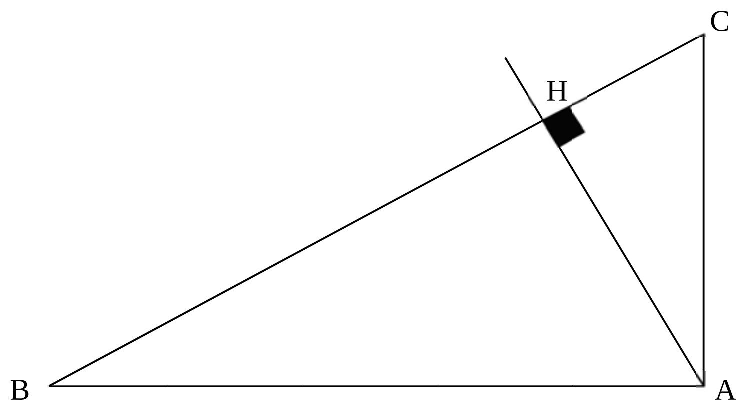
→ Moyennes et géométrie

Introduction

Dans cette note, nous nous intéressons aux moyennes arithmétique, géométrique et harmonique de deux réels strictement positifs. Plus spécifiquement, on peut en donner des représentations géométriques simples (historiquement attribuées à Archimède).

Un résultat préliminaire

On a, dans un triangle rectangle, un résultat essentiel (et très pratique dans de nombreuses démonstrations !) dont nous allons avoir besoin dans la partie suivante.



Soit donc ABC un triangle rectangle en A.
On note H le pied de la hauteur issue de A.

On a alors :

$$\boxed{HA^2 = HB \times HC}$$

En effet :

$$\tan \widehat{CBA} = \frac{HA}{HB} = \tan \widehat{HAC} = \frac{HC}{HA}$$

D'où le résultat.

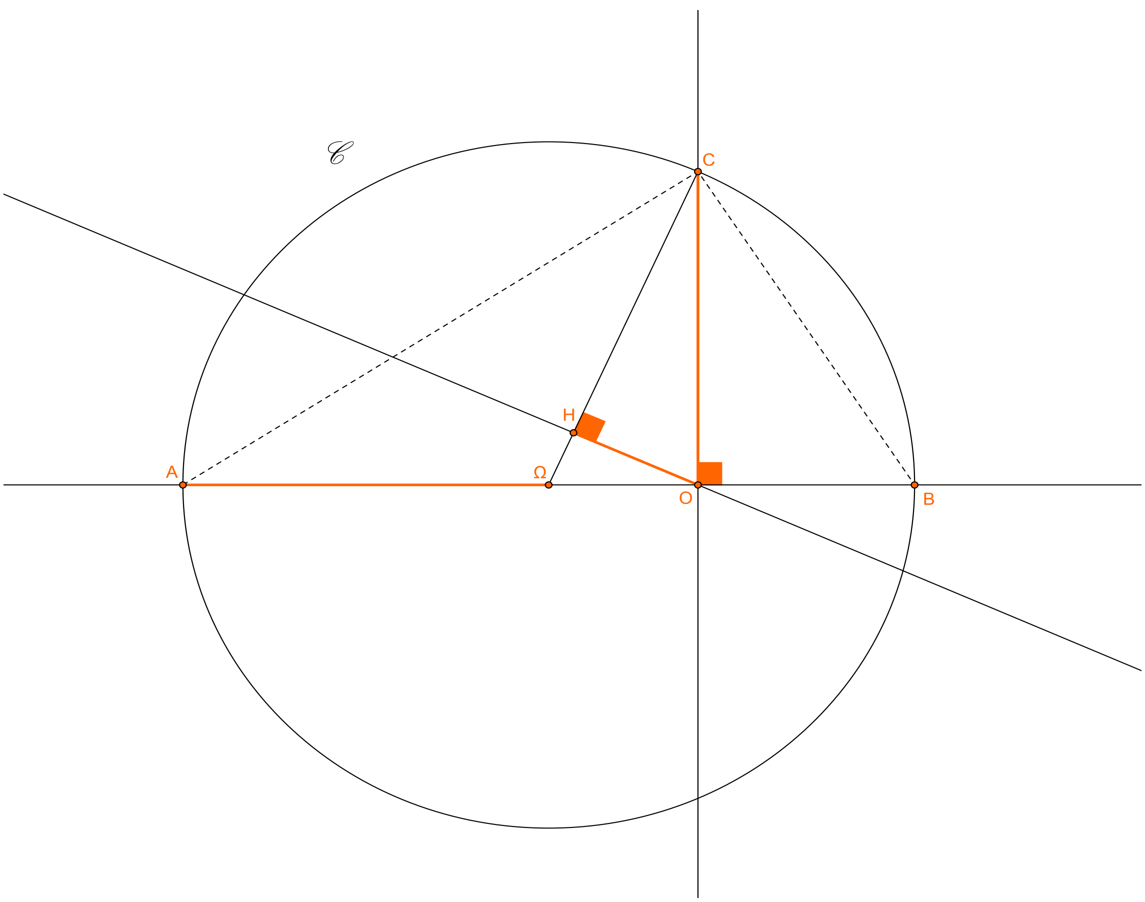
Des représentations géométriques pour les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique.

Considérons des réels strictement positifs a et b.
Rappelons que l'on définit :

- La moyenne arithmétique m de a et b par : $m=\frac{1}{2}(a+b)$.
- La moyenne géométrique g de a et b par : $g=\sqrt{ab}$.
- La moyenne harmonique h de a et b par : $\frac{1}{h}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, soit : $h=\frac{2ab}{a+b}$.

On considère alors la figure ci-dessous où :

- A et O sont deux points tels que : $\mathrm{OA}=a$.
- B est tel que : O, A et B sont alignés, B n'appartient pas au segment $[\mathrm{OA}]$ et $\mathrm{OB}=b$.
- Ω est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.
- $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$.
- C est un des points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par O.
- H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle $\Omega\mathrm{OC}$ rectangle en O.



Comme le point O appartient au segment $[\mathrm{AB}]$, on a : $\mathrm{AB}=\mathrm{AO}+\mathrm{OB}=a+b$.
Comme le point Ω est le milieu du segment $[\mathrm{AB}]$, il vient immédiatement :

$$\mathrm{A}\Omega=\Omega\mathrm{B}=\frac{AB}{2}=\frac{a+b}{2}$$

On obtient ainsi la moyenne arithmétique de *a* et *b*.

$$\boxed{m=\frac{a+b}{2}=\mathrm{A}\Omega=\Omega\mathrm{B}}$$

Le triangle ABC est inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et le segment $[\mathrm{AB}]$ est un de ses diamètres. On en déduit immédiatement que le triangle ABC est rectangle en C.
D'après le préambule, on a alors : $\mathrm{OC}^2=\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=ab$. D'où : $\mathrm{OC}=\sqrt{ab}$.

On obtient ainsi la moyenne géométrique de *a* et *b*.

$$\boxed{g=\sqrt{ab}=\mathrm{OC}}$$

Le triangle $\Omega\mathrm{OC}$ est rectangle en O. Comme le point H est le pied de la hauteur issue de O, on a, d'après le résultat préliminaire :

$$\mathrm{HO}^2=\mathrm{H}\Omega\times\mathrm{HC}$$

Le triangle OHC étant rectangle en H, le théorème de Pythagore nous donne :

$$\mathrm{HC}^2+\mathrm{HO}^2=\mathrm{OC}^2$$

Soit, en tenant compte de $\mathrm{OC}^2=ab$ et $\mathrm{HO}^2=\mathrm{H}\Omega\times\mathrm{HC}$:

$$\mathrm{HC}^2+\mathrm{H}\Omega\times\mathrm{HC}=ab$$

Mais on a aussi : $\mathrm{H}\Omega+\mathrm{HC}=\Omega\mathrm{C}=\Omega\mathrm{A}=\frac{a+b}{2}$. D'où : $\mathrm{H}\Omega=\frac{a+b}{2}-\mathrm{HC}$, puis :

$$ab=\mathrm{HC}^2+\mathrm{HC}\times\left(\frac{a+b}{2}-\mathrm{HC}\right)=\mathrm{HC}\times\frac{a+b}{2}$$

On en tire enfin : $\frac{1}{\mathrm{HC}}=\frac{a+b}{2ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

On obtient ainsi la moyenne harmonique de *a* et *b*.

$$\boxed{h=\frac{2ab}{a+b}=\mathrm{HC}}$$

Comparaison des moyennes

Des considérations géométriques nous permettent facilement d'obtenir : $\mathrm{HC} \leq \mathrm{OC} \leq \Omega\mathrm{B}$, soit :

$$\boxed{h \leq g \leq m}$$

Retrouvons et complétons cette double inégalité par le calcul.

Les moyennes *m* et *g* étant strictement positives (*a* et *b* l'étant), on peut comparer leurs carrés :

$$m^2 - g^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$$

Le résultat obtenu étant positif, on en déduit : $m^2 \geq g^2$, puis $m \geq g$.

On a, par ailleurs : $h = \dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{ab}{\frac{a+b}{2}}$, soit $h = \dfrac{g^2}{m}$.

Comme $m \geq g > 0$, il vient : $0 < \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{g}$. D'où : $h = \dfrac{g^2}{m} = \dfrac{1}{m} \times g^2 \leq \dfrac{1}{g} \times g^2 = g$.

On a bien : $h \leq g \leq m$.

Supposons maintenant que l'on ait : $0 < a \leq b$.

On a :

$$h - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \frac{2ab - a(a+b)}{a+b} = \frac{ab - a^2}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b}$$

Comme $b \geq a$, on a $h \geq a$.

Par ailleurs : $b - m = b - \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b-a}{2}$.

Comme $b \geq a$, on a $b \geq m$.

En définitive :

$$\boxed{\min(a,b) \leq h \leq g \leq m \leq \max(a,b)}$$